Math.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 171

Heft 2

Ausgegeben den 31. Mai 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 171. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Rasch, G., Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals 65

Boerner, H., Ein „belastetes" Variationsproblem 120

Dingeldey, Friedrich, Zu einem Satze von Hazzidakis über gewisse Systeme linearer Differentialgleichungen 128

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

math.
Harvard
6-11-35

Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals.

Von *G. Rasch* in Kopenhagen.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	65
Kapitel I. Hilfssätze über Matrizen	67
§ 1. Relativmatrizen	67
§ 2. Normalform	68
§ 3. Permutable Matrizen	68
§ 4. Ungleichungen	68
§ 5. Matrixfolgen	69
§ 6. Matrixfunktionen	70
§ 7. Analytische Funktionen von Matrizen	71
§ 8. Exponentialfunktion und Logarithmus	73
Kapitel II. Das Produktintegral	74
§ 9. Die Existenz des Produktintegrals	74
§ 10. Die Rechenregeln des Produktintegrals	76
§ 11. Die Peanosche Reihe	77
§ 12. Die inhomogene Gleichung	78
§ 13. Fundamental- und Partikularlösungen	80
§ 14. Die Konvergenz des Produktintegrals	81
§ 15. Das unbestimmte Produktintegral	82
§ 16. Die adjungierte Gleichung	83
§ 17. Derivation	84
§ 18. Die Ω-Transformation	84
§ 19. Transformation des Produktintegrals	85
§ 20. Die Transformationsgleichung	86
§ 21. Das Reduktionsproblem	88
§ 22. Transformation mit Relativmatrizen	89
§ 23. Relative Reduktion mittels Partikularlösungen	90
§ 24. Produktintegration durch Quadratur	90
§ 25. Ungleichungen für das Produktintegral	92
§ 26. Ein Grenzwertsatz	95
§ 27. Gleichungen mit asymptotisch konstantem Koeffizienten	95
Kapitel III. Gleichungen mit analytischem Koeffizienten	102
§ 28. Die Mehrdeutigkeit der Lösungen in einem Bereich. Windungsfunktionen	102
§ 29. Die Darstellung der Lösungen in einem doppelt zusammenhängenden Bereich	103
§ 30. Die Laurentreihe für $V(x)$	108
§ 31. Unwesentliche Singularitäten. Die kanonische Gleichung	110
§ 32. Die normale Gleichung	113
Literatur	118

Einleitung.

Eine lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

kann bekanntlich auf verschiedene Weise als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden:

$$y_k'(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) p_{jk}(x), \qquad k = 1, \ldots n$$

oder, wenn man n Lösungen $(y_{i1}(x), \ldots y_{in}(x))$, $i = 1, \ldots n$ auf einmal betrachtet

$$Y'(x) = Y(x)P(x), \tag{1}$$

wobei $Y(x) = (y_{ik}(x))$, $Y'(x) = (y_{ik}'(x))$, $P(x) = (p_{ik}(x))$, $i, k = 1, \ldots n$.

Zum Studium dieser Gleichung haben Volterra und Schlesinger zwei Operationen eingeführt, nämlich die Derivation

$$D_x Y(x) = Y^{-1}(x) Y(x) \tag{2}$$

und deren Umkehrung, die Produktintegration

$$\int_a^x (1 + P(t)dt) = \lim_{m \to \infty} \prod_0^{m-1} (1 + P(a_\mu)(a_{\mu+1} - a_\mu)), \tag{3}$$

wobei der Grenzübergang in gleicher Art wie bei der Riemannschen Integraldefinition ausgeführt wird.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit [1]) ist einmal, die Theorie dieser zwei Operationen etwas weiter zu führen, u. a. durch Hervorhebung der Verbindung zwischen dem Produktintegral und einer Reihenentwicklung für eine Lösung von (1), die zuerst von Peano [1] angegeben wurde und die nach einer einfachen Transformation die formell allgemeinere Reihe, zu der Schlesinger [1], S. 41 durch sukzessive Approximationen gelangt ist, enthält.

Dann aber soll zweitens die so entwickelte Theorie verwertet werden bei der Lösung verschiedener klassischer Probleme der Theorie der Differentialgleichungen: der Einteilung der Integrale von Poincaréschen Differentialgleichungen; dem Darstellungsproblem von Helge v. Koch [1], das dahingehend verallgemeinert wird, daß man die Lösung einer Gleichung sucht, deren Koeffizient eindeutig und regulär analytisch in einem beliebig doppelt zusammenhängenden Bereich ist; und schließlich der Diskussion der unwesentlichen Singularität.

Bei der Lösung des ersten Problems werden einige wichtige Sätze von Perron durch direkte Abschätzung gewisser Produktintegrale bewiesen.

Die Lösung des zweiten Problems beruht auf einem Kunstgriff, der im Prinzip von Frobenius [1] herrührt: Die inhomogene Gleichung

$$Y'(x; \varrho) = Y(x; \varrho)P(x) + x^{\varrho-1} \tag{4}$$

hat eine Lösung, die bis auf den Faktor x^ϱ eindeutig im Bereich ist, und diese Lösung ist eine meromorphe Funktion des Parameters ϱ, dessen Pole unabhängig von x sind, so daß die Residuen Partikularlösungen der homogenen Gleichung sind.

Eine Gleichung mit einer unwesentlichen Singularität in $x = 0$ ist dadurch charakterisiert, daß sie eine Lösung von der Form $x^A V(x)$ besitzt, wobei $V(x)$ regulär in 0 ist. Horn [2] hat gezeigt, daß sie rational in eine kanonische Gleichung

$$Y'(x) = Y(x)\left(\frac{B}{x} + F(x)\right) \tag{5}$$

transformiert werden kann, wo $F(x)$ regulär in 0 ist und umgekehrt, daß eine solche Gleichung eine unwesentliche Singularität in 0 besitzt. Was nun A und B anbetrifft, so werden ihre Eigenwerte gleich sein, aber ihre Normalformen brauchen — im Gegensatz zu dem, was Volterra [3], S. 25—29 behauptet — nicht äquivalent zu sein; wieweit sie es sind, ist abhängig von $F(x)$. Es gilt dagegen folgender Satz: *Eine Gleichung mit einer unwesentlichen Singularität kann rational in eine normale Gleichung von obenstehender Form*

[1]) Einen wesentlichen Teil hiervon bilden die ersten zwei Kapitel meiner in dänischer Sprache geschriebenen Habilitationsschrift: Om Matrixregning og dens Anvendelse paa Differens- og Differentialligninger, Kopenhagen 1930.

transformiert werden, wobei $F(x)$ in 0 regulär ist und die Eigenwerte von B keine ganzzahligen Differenzen $\neq 0$ haben; eine solche Gleichung hat eine Lösung von der Form $x^A V(x)$ mit $A = B$ und außerdem $V(0) = 1$.

Kapitel I.
Hilfssätze über Matrizen.

§ 1. Relativmatrizen.

Eine rechteckige Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir von der Ordnung (m, n). Ist diese Matrix in pq rechteckige Felder eingeteilt, die also jedes für sich wieder Matrizen sind,

$$A = (A_{ik}), \quad A_{ik} = (a_{hj}^{(ik)}), \tag{1, 1}$$

so sagen wir, die ursprüngliche Matrix sei als *Relativmatrix* von der Relativordnung (p, q) geschrieben.

Ist eine andere Matrix B in entsprechender Weise eingeteilt, aber so, daß die Produkte $A_{ij} B_{jk}$ existieren, also A_{ij} ebenso viele Spalten wie B_{jk} Zeilen besitzt, dann kann man AB bilden durch Multiplikation der Relativmatrizen, so als ob deren Elemente Zahlen wären [1]):

$$AB = (\Sigma A_{ij} B_{jk}). \tag{1, 2}$$

Wenn A einen positiven Rang r hat, dann enthält sie wenigstens *eine* invertierbare Teilmatrix von der beliebigen Ordnung $q \leqq r$. Gewöhnlich kann man annehmen, daß diese Teilmatrix in der oberen linken Ecke steht, da man sie sonst durch Multiplikation mit zwei passend gewählten Vertauschungsmatrizen [2]) dorthin bringen kann. Es ist zuweilen von Bedeutung, daß man, wenn A invertierbar ist, die invertierbare Teilmatrix innerhalb der ersten q Zeilen (Spalten) wählen kann; das erkennt man aus der Laplaceschen Entwicklung der Det. A nach den ersten q Zeilen (Spalten). In diesem Fall braucht A also nur mit *einer* Vertauschungsmatrix multipliziert zu werden.

Die besagte Teilmatrix nennen wir A_{11} und teilen A ein in

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{1, 3}$$

Danach kann man A in ein Produkt von drei relativen Elementarmatrizen zerlegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1, 4}$$

Dabei ist

$$\begin{cases} A_{11} = A_{11}, & A_{22} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}, \\ A_{12} = A_{11}^{-1} A_{12}, & A_{21} = A_{21} A_{11}^{-1}. \end{cases} \tag{1, 5}$$

In dem speziellen Fall, daß A quadratisch und invertierbar ist, hat auch A_{22} diese Eigenschaften, und die Zerlegung von A kann auf andere Weise geschehen, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A'_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1, 4a}$$

wobei

$$A'_{21} = A_{22}^{-1} A_{21}. \tag{1, 5a}$$

Es kann vorkommen, daß die Einteilung von A von der Form (A_{11}, A_{12}) oder $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}$ ist, aber man erkennt leicht, wie die Zerlegung in Faktoren dann modifiziert werden muß.

---

[1]) Vgl. z. B. van der Waerden [1], S. 116.

[2]) Eine Vertauschungsmatrix entsteht, wenn man in der Einheitsmatrix einige Zeilen oder Spalten untereinander vertauscht (vgl. Kronecker [1], S. 369).

§ 2. Normalform.

Zwei quadratische Matrizen A und B heißen äquivalent, wenn zwischen ihnen eine Relation von der Form

$$A = \mathsf{A} B \mathsf{A}^{-1} \tag{2, 1}$$

besteht, wobei A eine invertierbare Matrix ist. Nach Weierstraß [1] ist jede Matrix A einer Matrix P von besonders einfacher Struktur äquivalent. Diese Normalform kann als relativquadratische Matrix

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{P}_m \end{pmatrix} \tag{2, 2}$$

geschrieben werden, wo jedes P_i von der Form

$$\mathsf{P}_i = \varrho_i + \Theta_i,\ \Theta_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{ev.} = (0)) \tag{2, 3}$$

ist. Die Zahlen ϱ_i, die man die Eigenwerte von A nennt, sind Nullstellen der charakteristischen Funktion Det. $(A - \varrho)$ der gegebenen Matrix, und wenn P_i von der Ordnung μ_i ist, dann ist $(\varrho - \varrho_i)^{\mu_i}$ ein Elementarteiler dieser Determinante [1]).

Da wir Matrizen von der Form Θ noch häufig brauchen werden, sei schon hier bemerkt: wenn Θ_1 und Θ_2 von der Ordnung m und n sind, während $C = (c_{ik})$ von der Ordnung (m, n) ist, dann ist

$$\Theta_1^{\mu}\, C\, \Theta_2^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{1.\nu+1} & \cdots & \cdots & c_{1.n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-\mu.\nu+1} & \cdots & \cdots & c_{m-\mu.n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2, 4}$$

Besonders ist

$$\Theta_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \Theta_1^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \Theta_1^m = 0. \tag{2, 5}$$

§ 3. Permutable Matrizen.

Über permutable Matrizen erwähnen wir hier zwei Sätze, von denen wir im Folgenden noch Gebrauch machen werden.

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Matrizen, die mit einer gegebenen Matrix permutabel sind, auch untereinander permutabel sind, ist, daß die Elementarteiler der gegebenen Matrix von der Form* $(\varrho - \varrho_1)^{e_1}, \ldots (\varrho - \varrho_m)^{e_m}$ *und* $\varrho_1, \ldots \varrho_m$ *verschieden sind.* (Volterra [2], S. 11.)

II. *Die Eigenwerte zweier permutabler Matrizen A und B kann man so assoziieren* $\varrho_1, \sigma_1; \ldots; \varrho_n, \sigma_n$, *daß die Eigenwerte von* $\alpha A + \beta B$ *und* AB, $\alpha\varrho_i + \beta\sigma_i$ *bzw.* $\varrho_i\sigma_i$, $i = 1, \ldots n$ *sind.* α *und* β *bezeichnen dabei beliebige Skalare.* (Frobenius [3].)

§ 4. Ungleichungen. Die Matrix E.

Sind alle Elemente in A und B reell, so sollen durch die Relationen

$$A \leqq B \text{ und } A \geqq B \tag{4, 1}$$

[1]) Vgl. z. B. v. d. Waerden [1], §§ 109, 110.

die Ungleichungen

$$a_{ik} \leqq b_{ik} \text{ bzw. } a_{ik} \geqq b_{ik} \tag{4, 2}$$

ausgedrückt werden.

Den *absoluten Betrag einer Matrix* definieren wir als die Matrix der absoluten Beträge ihrer Elemente

$$|A| = (|a_{ik}|). \tag{4, 3}$$

Es gelten dann augenscheinlich die folgenden Ungleichungen

$$||A| - |B|| \leqq |A + B| \leqq |A| + |B| \tag{4, 4}$$

und

$$|AB| \leqq |A| \cdot |B|. \tag{4, 5}$$

Das Gleichheitszeichen in der letzten Relation gilt nur in speziellen Fällen, z. B. wenn A und B positiv sind.

Sind alle Elemente in A absolut genommen kleiner oder gleich $\frac{a}{n}$, so schreiben wir

$$|A| \leqq aE. \tag{4, 6}$$

Die Matrix E, deren Elemente alle gleich $\frac{1}{n}$ sind und von der wir noch häufig Gebrauch machen werden, besitzt mehrere einfache Eigenschaften. Zuerst ist

$$E^\nu = E, \quad \nu \geqq 1. \tag{4, 7}$$

Weiter ist

$$EA = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \tag{4, 8}$$

und

$$AE = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_m^* \end{pmatrix} E, \quad \alpha_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \tag{4, 8a}$$

woraus folgt

$$EAE = \alpha E, \quad \alpha = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}. \tag{4, 9}$$

Bei Anwendung von Relativmatrizen kann es praktisch sein, E in folgender Weise zu zerlegen:

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{m1} & \cdots & E_{mm} \end{pmatrix} \tag{4, 10}$$

wobei $E_{11}, \ldots E_{mm}$ quadratisch sind. Es gelten dann die Relationen

$$E_{ij} E_{jk} = \frac{\mu_j}{n} \cdot E_{ik}, \tag{4, 11}$$

wobei μ_j die Ordnung von E_{jj} ist.

§ 5. Matrixfolgen.

Gibt es zu jedem positiven ε unendlich viele ν, so daß

$$|A_\nu - A| < \varepsilon E \tag{5, 1}$$

ist, dann sagen wir die Matrixfolge (A_ν) besitzt die *Häufungsmatrix* A.

Die Folge heißt konvergent, wenn sie nur *eine* Häufungsmatrix besitzt, d. h. wenn die obige Ungleichung für jedes hinreichend große ν erfüllt ist, oder, was dasselbe besagt, wenn jede Elementfolge konvergiert.

Das allgemeine Konvergenzprinzip gilt offenbar auch für Matrixfolgen: Besteht für jedes positive ε und jedes hinreichend große μ und ν die Ungleichung

$$(5, 2) \qquad |A_\mu - A_\nu| < \varepsilon E,$$

so ist die Folge (A_ν) konvergent.

Weiterhin führen wir den Satz von Bolzano-Weierstrass an: Jede beschränkte Matrixfolge besitzt mindestens eine Häufungsmatrix, und jede Häufungsmatrix läßt sich darstellen als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.

Auf Grund der Ungleichungen (4, 4) und (4, 5) kann man leicht die folgenden Rechenregeln beweisen:

$$(5, 3) \qquad \lim_{\nu\to\infty}(A_\nu + B_\nu) = A + B, \quad \lim_{\nu\to\infty} A_\nu B_\nu = A\,B,$$

wenn $A_\nu \to A$ und $B_\nu \to B$.

Existiert weiterhin $\lim_{\nu\to\infty} A_\nu^{-1}$, so hat man nach (5, 3)

$$1 = \lim_{\nu\to\infty} A_\nu \cdot \lim_{\nu\to\infty} A_\nu^{-1},$$

d. h. A ist invertierbar und

$$(5, 4) \qquad \lim_{\nu\to\infty} A_\nu^{-1} = A^{-1}.$$

Umgekehrt: Ist A invertierbar, dann können wir

$$A_\nu = A(1 - \mathsf{H}_\nu), \qquad |\mathsf{H}_\nu| < \eta_\nu E$$

setzen, wobei $\eta_\nu \to 0$. Da die Reihe $\sum_0^\infty \mathsf{H}_\nu^\mu$ die Majorantenreihe $1 + \sum_1^\infty \eta_\nu^\mu \cdot E = 1 + \frac{\eta_\nu}{1-\eta_\nu} \cdot E$ hat, ist sie konvergent, und zwar ist ihre Summe $(1 - \mathsf{H}_\nu)^{-1}$. A_ν ist folglich invertierbar für jedes hinlänglich große ν und

$$(5, 5) \qquad A_\nu^{-1} = (1 - \mathsf{H}_\nu)^{-1} A^{-1} \to A^{-1}.$$

§ 6. Matrixfunktionen.

Eine Matrix, deren Elemente Funktionen von einer oder mehreren Variablen sind, nennen wir eine *Matrixfunktion.*

Indem man den Differentialquotienten und das Integral einer Matrix definiert als die Matrizen, deren Elemente Differentialquotienten, bzw. Integrale der Elemente der betrachteten Matrix sind, erkennt man, daß man mit Matrixfunktionen genau so wie mit gewöhnlichen Funktionen rechnen kann. Man muß dabei nur die oben entwickelten Rechenregeln beachten, und weiterhin bemerken, daß die Mittelwertsätze nur für die gewöhnlichen Funktionen gelten.

Wir werden uns deshalb im Folgenden ohne weiteres der für gewöhnliche Funktionen gebräuchlichen Terminologie: Stetigkeit, Differentiierbarkeit, totales Differential, analytisch, Cauchys Integral, analytische Fortsetzung usw. bedienen, um Eigenschaften der Matrixfunktionen auszudrücken. Es ist aber hierbei zu bemerken, daß einzelne Elemente Eigenschaften haben können, die der Matrixfunktion als solcher nicht zukommen. Sind z. B. die Elemente in $F(x) = (f_{ik}(x))$ durch Potenzreihen definiert, so setzt man $F(x)$ analytisch fort, durch simultane Fortsetzung der einzelnen Funktionen $f_{ik}(x)$, und auf dieser Grundlage baut man die vollständige analytische Funktion $F(x)$ auf. Es kann dabei geschehen, daß einzelne der Funktionen $f_{ik}(x)$ in einem größeren Bereich fortsetzbar sind als $F(x)$, ebenso wie eine Singularität für $F(x)$ keineswegs eine Singularität für jedes einzelne Element in $F(x)$ zu sein braucht.

§ 7. Analytische Funktionen von Matrizen.

Ist $f(x)$ eine analytische Funktion, so definieren wir nach einem Vorschlag von Frobenius [2] die analytische Funktion $f(x)$ der Matrix $X = (x_{ik})$ und deren Differentialquotienten durch das Cauchysche Integral

$$f^{(\nu)}(X) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int f(\zeta)\,(\zeta - X)^{-\nu-1}\,d\zeta\,. \tag{7, 1}$$

Dabei ist über eine geschlossene Kurve zu integrieren, die die Eigenwerte von X, aber keine singulären Punkte von $f(x)$ umschließt. Man erkennt unmittelbar, daß das eine analytische Funktion der n^2 Veränderlichen $(x_{11}, \ldots, x_{nn})$ ist, und daß X ein regulärer Punkt ist, wenn keiner ihrer Eigenwerte mit einer Singularität von $f(x)$ zusammenfällt.

Aus der Definition von $f(X)$ ergibt sich unmittelbar der Satz:

I. *Wenn A mit X permutabel ist, ist es auch mit $f(X)$ permutabel.*

Ist $\Xi = \mathsf{A}^{-1} X \mathsf{A}$ die Normalform von X, so ist augenscheinlich

$$f(X) = \mathsf{A} \Xi \mathsf{A}^{-1}. \tag{7, 2}$$

Eine erste Vorstellung über die Struktur der Matrix $f(\Xi)$ kann man sich leicht machen. Ist nämlich Ξ_0 die Diagonalmatrix, die dieselbe Diagonale wie Ξ hat, und setzen wir

$$\Xi = \Xi_0 + \Theta\,, \tag{7, 3}$$

so wird nach (2, 5) eine gewisse Potenz von Θ gleich Null sein:

$$\Theta^p = 0\,.$$

Da Ξ_0 und Θ permutabel sind, wird

$$(\zeta - \Xi)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{p-1} (\zeta - \Xi_0)^{-\nu-1}\,\Theta^\nu$$

und folglich

$$f(\Xi) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{f^{(\nu)}(\Xi_0)}{\nu!}\,\Theta^\nu. \tag{7, 4}$$

(7, 2) ergänzt durch (7, 4) nennen wir die *erste kanonische Form* von $f(X)$. Ihre besondere Bedeutung beruht darauf, daß $f^{(\nu)}(\Xi_0)$ eine Diagonalmatrix ist. Setzt man

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^{(0)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \xi_n^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{7, 5}$$

so wird nämlich

$$(\zeta - \Xi_0)^{-1} = \begin{pmatrix} (\zeta - \xi_1^{(0)})^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & (\zeta - \xi_n^{(0)})^{-1} \end{pmatrix},$$

und hieraus erkennt man unmittelbar, daß

$$f^{(\nu)}(\Xi_0) = \begin{pmatrix} f^{(\nu)}(\xi_1^{(0)}) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & f^{(\nu)}(\xi_n^{(0)}) \end{pmatrix}. \tag{7, 6}$$

Die *zweite kanonische Form*, die genaueren Aufschluß über die Struktur von $f(\Xi)$ gibt, bekommt man, wenn Ξ als eine relative Diagonalmatrix

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \Xi_m \end{pmatrix}, \qquad \Xi_i = \xi_i + \Theta_i = \begin{pmatrix} \xi_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \xi_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \xi_i \end{pmatrix} (\text{ev.} = (\xi_i)) \tag{7, 7}$$

geschrieben wird. Dann ist

$$(\zeta - \Xi)^{-1} = \begin{pmatrix} (\zeta - \Xi_1)^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & (\zeta - \Xi_m)^{-1} \end{pmatrix},$$

und hieraus folgt

$$f(\Xi) = \begin{pmatrix} f(\Xi_1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & f(\Xi_m) \end{pmatrix}. \tag{7, 8}$$

Auf jedes Diagonalelement dieser Relativmatrix wenden wir nun (7, 4) und (2, 5) an:

$$f(\Xi_i) = \sum_{\nu=0}^{e_i-1} \frac{f^{(\nu)}(\xi_i)}{\nu!} \cdot \Theta_i^{\nu} = \begin{pmatrix} f(\xi_i) & 0 & \cdots & 0 \\ f'(\xi_i) & f(\xi_i) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{f^{(e_i-1)}(\xi_i)}{(e_i-1)!} & \cdots & \cdots & f(\xi_i) \end{pmatrix}, \tag{7, 9}$$

und gewinnen damit einen Einblick in die Struktur der Matrix $f(\Xi)$.

Eine *dritte kanonische Form* [1]) erhält man durch Anwendung der Partialbruchzerlegung von $(\zeta - X)^{-1}$, deren Pole ja $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sind. Wird

$$(\zeta - X)^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{p_i} \frac{X_{i\nu}}{(\zeta - \xi_i)^{\nu+1}} \tag{7, 10}$$

in (7, 1) mit $\nu = 0$ eingesetzt, so bekommt man offenbar

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{p_i} \frac{f^{(\nu)}(\xi_i)}{\nu!} X_{i\nu}. \tag{7, 11}$$

Durch Vergleich mit der ersten kanonischen Form ergibt sich die interessante Formel

$$\sum_{i=1}^{m} f^{(\nu)}(\xi_i) X_{i\nu} = \mathsf{A} f^{(\nu)}(\Xi_0)\, \Theta^{\nu} \mathsf{A}^{-1}. \tag{7, 12}$$

In gewissen Fällen kann die Normalform von $f(\Xi)$ leicht angegeben werden. Ist nämlich die Ordnung e_i der Matrix Ξ_i positiv und $f'(\xi_i) \neq 0$, so entspricht $f(\Xi_i)$ nur *ein* Elementarteiler $(\varrho - f(\xi_i))^{e_i}$, und es existiert daher eine Matrix B_i, für die

$$f(\Xi_i) = \mathsf{B}_i (f(\xi_i) + \Theta_i) \mathsf{B}_i^{-1}$$

ist. Sind diese Bedingungen für alle Werte von i erfüllt, dann gibt es also eine Matrix

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{B}_m \end{pmatrix},$$

die durch

$$f(\Xi) = \mathsf{B}(f(\Xi_0) + \Theta)\mathsf{B}^{-1} \tag{7, 13}$$

die Reduktion auf die Normalform leistet. Andernfalls bedarf die Bestimmung der Normalform einer eingehenderen Untersuchung, die wir aber hier nicht vornehmen wollen, da sie für das Folgende nicht nötig ist.

Die Formel (7, 4) ist ein Spezialfall eines Satzes von H. B. Phillips [1]:

II. *Sind A und X permutabel und $\varrho_1, \xi_1; \ldots; \varrho_n, \xi_n$ deren assoziierte Eigenwerte, so gilt die Entwicklung*

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(A)}{\nu!} \cdot (X - A)^{\nu}, \tag{7, 14}$$

wenn ξ_i im Regularitätskreis um ϱ_i für $f(x)$ liegt.

[1]) Bromwich [1].

Als Integrationsweg in (7, 1) mit $\nu = 0$ wählt man eine Kurve, die die Kreise $|x - \varrho_i| = |\xi_i - \varrho_i|$, aber keine Singularität für $f(x)$, umschließt. Die Normalform der Matrix $(\zeta - A)^{-1}(X - A)$, deren Eigenwerte nach Frobenius $\frac{\xi_i - \varrho_i}{\zeta - \varrho_i}$ sind (vgl. § 3, II), ist absolut genommen

$$\leqq 1 - \varepsilon + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infolgedessen ist die Reihe

$$(\zeta - X)^{-1} = \sum_0^\infty (\zeta - A)^{-\nu-1}(X - A)^\nu$$

gleichmäßig konvergent, und damit ist der Satz bewiesen.

Als Beispiel führen wir an, daß

$$f(xE) = \sum_0^\infty \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}(xE)^\nu,$$

wenn $f(x)$ regulär in 0 ist. Durch analytische Fortsetzung erkennt man, daß die hieraus folgenden Formeln

$$(7, 15) \qquad \begin{cases} f(xE) - f(0) = (f(x) - f(0))E \\ f(xE)E = f(x)E \end{cases}$$

für jedes x gelten, für das $f(x)$ regulär ist.

§ 8. Exponentialfunktion und Logarithmus [1]).

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus sind durch die Gleichung

$$(8, 1) \qquad e^{\log X} = X$$

untereinander verbunden, was man z. B. auf Grund der Potenzreihen

$$e^X = \sum_0^\infty \frac{X^\nu}{\nu!},$$

$$\log(1 - X) = -\sum_1^\infty \frac{X^\nu}{\nu}, \quad |\xi_i| < 1,\ i = 1, \ldots n$$

beweisen kann. Für $|X| < \xi E$, $\xi < 1$ hat man nämlich

$$e^{-\log(1-X)} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-\log(1-X))^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{\nu!} \sum_{\mu=\nu}^\infty \alpha_\mu^{(\nu)} X^\mu.$$

Da die Koeffizienten $\alpha_\mu^{(\nu)}$ alle positiv sind, kann leicht bewiesen werden, daß die Doppelreihe absolut konvergent ist. Wir dürfen deshalb die Summationsordnung ändern, wodurch wir

$$e^{-\log(1-X)} = \sum_{\mu=0}^\infty X^\mu \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\alpha_\nu^{(\mu)}}{\nu!}$$

bekommen, und hierin müssen die Koeffizienten von X^μ gleich 1 sein, was doch für skalares x der Fall ist. Folglich ist

$$e^{-\log(1-X)} = (1 - X)^{-1},$$

so daß (8, 1) erfüllt ist, wenn X in der Nähe von 0 liegt. Durch analytische Fortsetzung erkennt man, daß die Relation allgemeingültig ist.

[1]) Diese Funktionen sind in gewisser Beziehung von J. v. Neumann [1] sorgfältig diskutiert worden.

Wir verzichten hier auf eine allgemeine Diskussion des Periodenproblems der Exponentialfunktion und des damit zusammenhängenden Mehrdeutigkeitsproblems für den Logarithmus. Im Hinblick auf das Folgende bemerken wir nur — mit den Bezeichnungen von oben —: wenn p_i ein Skalar von der Ordnung e_i ist, dann wird

$$\Pi = 2\pi i \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_m \end{pmatrix}. \tag{8, 2}$$

eine Periode für e^{Ξ} sein, d. h. $e^{\Xi+\Pi} = e^{\Xi}$. Ξ und Π sind nämlich permutabel, und für zwei permutable Matrizen X und Y gilt nach § 7, II die Beziehung

$$e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y = e^Y \cdot e^X; \tag{8, 3}$$

außerdem ist $e^{\Pi} = 1$. Hieraus folgt, daß die Gleichung

$$e^X = A \tag{8, 4}$$

u. a. die Lösung hat

$$X = \mathsf{A}(\log \mathsf{P} + \Pi)\mathsf{A}^{-1}. \tag{8, 5}$$

Wenn x eine komplexe Variable und A eine konstante Matrix ist, sieht man, daß die Funktionen e^{xA} und $x^A = e^{A \log x}$ die Differentialgleichungen

$$Y'(x) = A\,Y(x) = Y(x)A\,, \text{ bzw. } x\,Y'(x) = A\,Y(x) = Y(x)A \tag{8, 6}$$

befriedigen [1]).

Da wir besonders x^A noch häufig verwenden werden, geben wir dessen kanonische Formen an. Ist die Normalform von A die folgende

$$\mathsf{P} = \mathsf{A}^{-1} A \mathsf{A} = \mathsf{P}_0 + \Theta = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{P}_m \end{pmatrix}, \tag{8, 7}$$

wobei $\mathsf{P}_i = \varrho_i + \Theta_i$, so hat man [2])

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^{-1} x^A \mathsf{A} &= x^{\mathsf{P}_0} \cdot x^{\Theta} = x^{\mathsf{P}_0} \cdot \sum_{\nu=0}^{e-1} \frac{(\log x)^\nu}{\nu!} \Theta^\nu \\ &= \begin{pmatrix} x^{\mathsf{P}_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & x^{\mathsf{P}m} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{8, 8}$$

$$x^{\mathsf{P}i} = x^{\varrho_i} \cdot \sum_{\nu=0}^{e_i-1} \frac{(\log x)^\nu}{\nu!} \Theta_i^\nu.$$

Ist weiterhin

$$(\varrho - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{p_i} \frac{A_{i\nu}}{(\varrho - \varrho_i)^{\nu+1}}, \tag{8, 9}$$

dann wird

$$x^A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{p_i} A_{i\nu} \frac{(\log x)^\nu}{\nu!}\, x^{\varrho_i}. \tag{8, 10}$$

Kapitel II.
Das Produktintegral.
§ 9. Die Existenz des Produktintegrals.

In der komplexen Ebene sei ein reguläres Kurvenstück $\mathfrak{L}$ ohne Doppelpunkte gegeben, und $P(x)$ sei eine Matrixfunktion, die längs dieser Kurve stetig ist. Wir suchen

[1]) Peano [1].

[2]) Volterra [2], S. 30—31.

dann eine Matrixfunktion $Y(x)$, die längs $\mathfrak{L}$ differentiierbar ist und die Differentialgleichung

$$Y'(x) = Y(x)\,P(x) \tag{9, 1}$$

befriedigt.

Bezeichnen a und x zwei beliebige Punkte auf $\mathfrak{L}$ und sind $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m = x$ Punkte zwischen a und x auf der Kurve, so ist infolge (9, 1)

$$Y(a_{\mu+1}) - Y(a_\mu) = (Y(a_\mu)\,P(a_\mu) + \mathsf{H}(a_\mu, \delta_\mu))\,\delta_\mu\,, \tag{9, 2}$$

indem wir $\delta_\mu = a_{\mu+1} - a_\mu$ und

$$\mathsf{H}(x, \delta) = \frac{Y(x+\delta) - Y(x)}{\delta} - Y'(x)$$

setzen.

Mit Hilfe der Gleichung (9, 2), die man auch

$$Y(a_{\mu+1}) = Y(a_\mu)\,(1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu) + \mathsf{H}(a_\mu, \delta_\mu)\,\delta_\mu$$

schreiben kann, läßt sich $Y(x)$ durch $Y(a)$ und die Größen $\mathsf{H}(a_\mu, \delta_\mu)$ ausdrücken; eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$Y(x) = Y(a)\prod_{\mu=0}^{m-1}(1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu) + \sum_{\mu=0}^{m-1}\mathsf{H}(a_\mu, \delta_\mu)\,\delta_\mu \prod_{s=\mu}^{m-1}(1 + P(a_s)\,\delta_s)\,. \tag{9, 3}$$

Hieraus kann man schließen: *falls eine längs $\mathfrak{L}$ stetige und differentiierbare Lösung von* (9, 1) *existiert, wird sie dargestellt durch den Grenzwert*

$$Y(x) = Y(a)\cdot\lim_{m\to\infty}\prod_{\mu=0}^{m-1}(1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu)\,, \tag{9, 4}$$

wo das größte $|\delta_\mu| \to 0$, *wenn* $m \to \infty$.

Erstens ist nämlich $Y'(x)$ nach (9, 1) auf $\mathfrak{L}$ stetig und somit gleichmäßig stetig, so daß

$$\mathsf{H}(x, \delta) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (Y'(x+t) - Y'(x))\,dt \rightrightarrows 0, \qquad \text{wenn } \delta \to 0\ ^{1})\,.$$

Zu jedem hinreichend kleinen δ können wir demnach ein ε bestimmen, so daß

$$|\mathsf{H}(x, \delta)| \leqq \varepsilon E \tag{9, 5}$$

für jedes x auf $\mathfrak{L}$ und $\lim\limits_{\delta\to 0}\varepsilon = 0$.

Zweitens können wir einen Skalar c so wählen, daß

$$|P(x)| \leqq cE$$

für jedes x auf $\mathfrak{L}$, und hieraus folgt (vgl. (7, 15))

$$E\cdot\Big|\prod_{\mu}^{m-1}(1 + P(a_s)\,\delta_s)\Big| \leqq E\cdot\prod_{0}^{m-1}(1 + c\,|\delta_s|\,E) \leqq e^{c\cdot\Sigma|\delta_s|}\cdot E \leqq e^{cl}\cdot E\,, \tag{9, 6}$$

wobei l die Länge des Kurvenstückes von a bis x bezeichnet.

Aus den zwei Ungleichungen (9, 5) und (9, 6) folgt

$$|Y(x) - Y(a)\prod_{0}^{m-1}(1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu)| \leqq \varepsilon e^{cl}E \to 0\,, \qquad \text{wenn } m \to \infty\,,$$

und damit ist (9, 4) bewiesen.

Daß andererseits der Grenzwert in (9, 4) existiert, wenn $P(x)$ stetig ist, kann man beweisen auf Grund der Identität

$$\begin{cases} \prod\limits_{0}^{m-1}(1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu) = \sum\limits_{0}^{m} T_\mu^{(m)}\,, \\ T_\mu^{(m)} = \Sigma\, P(a_{s_1})\ldots P(a_{s_\mu})\,\delta_{s_1}\ldots\delta_{s_\mu},\ T_0^{(m)} = 1\,, \end{cases} \tag{9, 7}$$

[1]) $\rightrightarrows$ bezeichnet: *strebt gleichmäßig gegen.*

wo die Summation sich über

$$0 \leqq s_1 < s_2 < \cdots < s_\mu \leqq m-1 \tag{9, 8}$$

erstreckt. Es gilt nämlich für jedes μ

$$\lim_{m\to\infty} T_\mu^{(m)} = \int P(t_1) \ldots P(t_\mu)\, dt_1 \ldots dt_\mu = T_\mu(a, x)\,, \tag{9, 9}$$

wo der Integrationsbereich durch die Ungleichungen

$$a \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_\mu \leqq x \tag{9, 10}$$

angegeben wird. Mit der Ungleichung $b < c$ meinen wir dabei, daß beim Durchlaufen von $\mathfrak{L}$ in der Richtung von a nach x, b vor c passiert wird. Weiterhin ist

$$|\, T_\mu^{(m)}\,| \leqq c^\mu \cdot \Sigma\, |\, \delta_{s_1} \ldots \delta_{s_\mu}\,| \cdot E\,,$$

und hieraus folgt

$$|\, T_\mu^{(m)}\,| < \frac{(cl)^\mu}{\mu!} \cdot E\,. \tag{9, 11}$$

Entwickelt man $(|\,\delta_0\,| + \cdots + |\,\delta_{m-1}\,|)^\mu$ nach der Polynomialformel, so werden die Koeffizienten von $|\,\delta_{s_1} \ldots \delta_{s_\mu}\,|$ nämlich $\mu!$, so daß

$$\Sigma\, |\, \delta_{s_1} \ldots \delta_{s_\mu}\,| \leqq \frac{1}{\mu!}\, (|\,\delta_0\,| + \cdots + |\,\delta_{m-1}\,|)^\mu\,, \tag{9, 12}$$

welches zusammen mit $\Sigma\,|\,\delta_s\,| < l$ (9, 11) ergibt. Läßt man $m \to \infty$ streben, so bekommt man schließlich

$$|\, T_\mu(a, x)\,| \leqq \frac{(cl)^\mu}{\mu!} \cdot E\,. \tag{9, 13}$$

Hiernach kann man leicht zeigen, daß

$$\lim_{m\to\infty} \prod_0^{m-1} (1 + P(a_\mu)\, \delta_\mu) = \sum_0^\infty T_\mu(a, x)\,. \tag{9, 14}$$

Diesen Grenzwert, *das Produktintegral von* $1 + P(t)dt$ *von* a *bis* x *längs* $\mathfrak{L}$, bezeichnen wir mit

$$Y(a, x) = \int_a^x (1 + P(t)\, dt). \tag{9, 15}$$

Dieser wurde zuerst von Volterra [1, 2, 3] und später von Schlesinger [1, 2, 3] betrachtet, während die Reihenentwicklung (9, 14) für eine Lösung der Differentialgleichung (9, 1) von Peano [1] herrührt und später von Baker [1] wiedergefunden wurde. Eine allgemeinere Reihe wurde von Schlesinger [1] S. 41 angegeben, aber sie geht aus der von Peano durch eine Transformation hervor (vgl. § 19).

Der hier geführte Existenzbeweis für das Produktintegral gilt offenbar auch, wenn $P(x)$ nach Riemann integrierbar ist, und er kann leicht dahin ergänzt werden, daß man nur voraussetzt, daß $P(x)$ beschränkt und nach Lebesgue integrierbar ist. Da wir aber im folgenden keinen Gebrauch davon machen werden, begnügen wir uns damit, auf die diesbezügliche Arbeit von Schlesinger [4] hinzuweisen.

§ 10. Die Rechenregeln des Produktintegrals.

Aus der Definition des Produktintegrals folgt unmittelbar, daß, wenn a, b und c auf $\mathfrak{L}$ liegen, die folgende Relation besteht

$$\int_a^b (1 + P(t)dt) \cdot \int_b^c (1 + P(t)dt) = \int_a^c (1 + P(t)dt)\,. \tag{10, 1}$$

Setzen wir

$$(10,2)\qquad \int_a^a (1 + P(t)dt) = 1,$$

dann gilt diese Beziehung auch für $c = a$, und hieraus folgt

$$(10,3)\qquad \left(\int_a^b (1 + P(t)dt)\right)^{-1} = \int_b^a (1 + P(t)dt).$$

Liegen die Punkte a, x und $x + h$ auf $\mathfrak{L}$, so ist infolge (10, 1)

$$Y(a, x + h) = Y(a, x)\, Y(x, x + h),$$

und infolge (9, 15) hat man

$$\frac{Y(x, x+h) - 1}{h} - P(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (P(t) - P(x))\, dt + \frac{1}{h} \cdot \sum_2^\infty T_\mu(x, x + h).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite geht offenbar gegen 0 mit $h \to 0$, und dasselbe gilt auch von dem zweiten Glied, da es nach (9, 13) absolut genommen

$$\leqq \frac{1}{|h|} \cdot \sum_2^\infty \frac{(cl)^\mu}{\mu!} \cdot E$$

ist, wobei l jetzt die Bogenlänge von x bis $x + h$ bezeichnet, also kleiner ist als eine Konstante $\cdot h$. Hieraus folgt

$$(10,4)\qquad \lim_{h\to 0} \frac{Y(a, x+h) - Y(a, x)}{h} = \frac{\partial Y(a, x)}{\partial x} = Y(a, x)\, P(x),$$

und damit haben wir gezeigt, daß $Y(a, x)$ als Funktion von x differentiierbar längs $\mathfrak{L}$ ist und die Gleichung (9, 1) befriedigt.

In analoger Weise kann man leicht zeigen, daß $Y(a, x)$ auch als Funktion von a längs $\mathfrak{L}$ differentiierbar ist, und die Gleichung

$$(10,5)\qquad \frac{\partial Y(a, x)}{\partial a} = - P(a)\, Y(a, x)$$

befriedigt.

Fassen wir diese beiden Resultate zusammen, so können wir sagen: Das Produktintegral als Funktion der zwei Veränderlichen a und x besitzt das totale Differential

$$(10,6)\qquad dY(a, x) = - P(a)\, Y(a, x)\, da + Y(a, x)\, P(x)\, dx.$$

§ 11. Die Peanosche Reihe.

Wir werden jetzt die Peanosche Entwicklung des Produktintegrals etwas näher untersuchen. Man sieht leicht, daß das μ-fache Integral in (9, 10) als zwei iterierte Integrale

$$(11,1)\qquad T_\mu(a, x) = \int_a^x \int_{t_1}^x \cdots \int_{t_{\mu-1}}^x P(t_1) \cdots P(t_\mu)\, dt_\mu \cdots dt_1$$

$$= \int_a^x \int_a^{t_\mu} \cdots \int_a^{t_2} P(t_1) \cdots P(t_\mu)\, dt_1 \cdots dt_\mu$$

dargestellt werden kann, und hieraus liest man die zwei Rekursionsformeln [1]) ab:

$$(11,2)\qquad T_{\mu+1}(a, x) = \int_a^x P(t) T_\mu(t, x) dt = \int_a^x T_\mu(a, t) P(t)\, dt.$$

---

[1]) Peano [1].

Wird das erste Integral nach a und das zweite nach x differentiiert, so findet man die partiellen Ableitungen von $T_{\mu+1}(a, x)$ und hieraus wieder das totale Differential

$$(11, 3) \qquad dT_{\mu+1}(a, x) = -P(a)T_\mu(a, x)\,da + T_\mu(a, x)P(x)\,dx.$$

Wird die erste Formel in (11, 2) mehrere Male nacheinander angewandt, dann bekommt man

$$T_{\mu+\nu+1}(a, x) = \int_a^x \cdots \int_{t_\mu}^x P(t_1) \cdots P(t_{\mu+1})T_\nu(t_{\mu+1}, x)\,dt_{\mu+1} \cdots dt_1$$

und durch Vertauschen der Integrationsordnungen

$$T_{\mu+\nu+1}(a, x) = \int_a^x \int_a^{t_{\mu+1}} \cdots \int_a^{t_2} P(t_1) \cdots P(t_{\mu+1})T_\nu(t_{\mu+1}, x)\,dt_1 \cdots dt_{\mu+1},$$

woraus folgt

$$(11, 4) \qquad T_{\mu+\nu+1}(a, x) = \int_a^x T_\mu(a, t)P(t)T_\nu(t, x)\,dt.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man einen einfachen Ausdruck für das Restglied der Peanoschen Reihe finden. Setzt man

$$(11, 5) \qquad Y(a, x) = \sum_0^m T_\mu(a, x) + R_m(a, x),$$

so hat man nämlich

$$R_m(a, x) = \sum_0^\infty T_{m+\mu+1}(a, x) = \int_a^x \sum_0^\infty T_\mu(a, t)P(t)T_m(t, x)\,dt,$$

und hieraus folgt

$$(11, 6) \qquad R_m(a, x) = \int_a^x Y(a, t)P(t)T_m(t, x)\,dt.$$

Analog hierzu ist [1])

$$(11, 7) \qquad R_m(a, x) = \int_a^x T_m(a, t)P(t)Y(t, x)\,dt.$$

§ 12. Die inhomogene Gleichung.

Die inhomogene Gleichung

$$(12, 1) \qquad Y'(x) = Y(x)P(x) + R(x),$$

wo $P(x)$ und $R(x)$ auf $\mathfrak{L}$ stetig sind, ist leicht zu lösen, wenn man ein Fundamentalintegral zu (9, 1) kennt. Man hat nämlich in Analogie zu (9, 3)

$$Y(x) = Y(a) \cdot \prod_{\mu=0}^{m-1}(1 + P(a_\mu)\delta_\mu) + \sum_{\mu=0}^{m-1}(R(a_\mu) + \mathsf{H}(a_\mu, \delta_\mu))\delta_\mu \cdot \prod_{s=\mu}^{m-1}(1 + P(a_s)\delta_s),$$

so daß die Lösung, die 0 ist, für $x = a$, dargestellt wird durch

$$(12, 2) \qquad Y_1(a, x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m-1} R(a_\mu)\delta_\mu \cdot \prod_{s=\mu}^{m-1}(1 + P(a_s)\delta_s).$$

Da nun das Produkt (9, 4) gleichmäßig gegen das entsprechende Produktintegral konvergiert, so wird

$$\prod_{\mu}^{m-1}(1 + P(a_s)\delta_s) - \int_{a_\mu}^{x}(1 + P(t)dt) \simeq 0, \qquad \text{wenn } m \to \infty,$$

[1]) Vgl. Schlesinger [1], S. 41, Formel IV.

und daraus folgt

$$Y_1(a, x) = \int_a^x R(t)\, Y(t, x)dt\,. \tag{12, 3}$$

Analog hierzu wird die Lösung von

$$Y'(x) = -\,P(x)\,Y(x) + R(x), \tag{12, 4}$$

die 0 ist, für $x = a$, dargestellt durch [1])

$$Y_2(a, x) = \int_a^x Y(x, t)R(t)\,dt\,. \tag{12, 5}$$

Setzt man z. B. in (12, 3) die Peanosche Reihe mit dem Restglied (11, 6) für $Y(t, x)$ ein, so findet man

$$Y_1(a, x) = \sum_0^m S_\mu(a, x) + \mathfrak{R}_m(a, x)\,, \tag{12, 6}$$

wobei

$$S_\mu(a, x) = \int_a^x R(t)\, T_\mu(t, x)\,dt \tag{12, 7}$$

und

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_m(a, x) = \int_a^x \int_t^x R(t)\, Y(t, \tau) P(\tau)\, T_m(\tau, x)\,d\tau\,dt \\ \qquad\qquad = \int_a^x Y_1(a, \tau) P(\tau)\, T_m(\tau, x)\,d\tau\,, \end{cases} \tag{12, 8}$$

oder bei Anwendung der Formel (11, 7) für R_m

$$\mathfrak{R}_m(a, x) = \int_a^x S_m(a, \tau)\, P(\tau)\, Y(\tau, x)\,d\tau\,. \tag{12, 9}$$

Schließlich leitet man leicht aus (11, 4) die Formel

$$S_{\mu+\nu+1}(a, x) = \int_a^x S_\mu(a, t)\, P(t)\, T_\nu(t, x)\,dt \tag{12, 10}$$

ab, die auch für $\mu = -1$ gilt, wenn man $S_{-1}(a, x) = R(x)$ setzt.

Für $\nu = 0$ ergibt sich die Rekursionsformel

$$S_{\mu+1}(a, x) = \int_a^x S_\mu(a, t)\, P(t)\,dt\,, \tag{12, 11}$$

d. h. *die Folge* $(S_\mu(a, x))$ *ist durch genau dieselbe Rekursionsformel bestimmt, wie* $(T_\mu(a, x))$, *nur lautet das nullte Glied der zwei Folgen* $S_0(a, x) = \int_a^x R(t)\,dt$ *bzw.* $T_0(a, x) = 1$.

Zur Anwendung der Formel (12, 3) bemerken wir: Sind $Y(a, x)$ und $Z(a, x)$ die Produktintegrale von $1 + P(t)\,dt$ bzw. $1 + Q(t)\,dt$, dann ist $Y(a, x) - Z(a, x)$ die Lösung der Gleichung

$$V'(x) = V(x)\, Q(x) + Y(a, x)\, R(x),\ P(x) = Q(x) + R(x)\,, \tag{12, 12}$$

die 0 ist, für $x = a$. Folglich ist

$$\begin{cases} Y(a, x) - Z(a, x) = \int_a^x Y(a, t)\, R(t)\, Z(t, x)\,dt \\ \qquad\qquad = \int_a^x Z(a, t)\, R(t)\, Y(t, x)\,dt\,. \end{cases} \tag{12, 13}$$

[1]) Peano [1].

Ist $P(x)$ weiterhin von einem Parameter λ abhängig und hat es eine in x und λ stetige partielle Ableitung nach t, so kann man hieraus leicht einen Ausdruck für den nach λ partiellen Differentialquotienten des Produktintegrals

$$(12, 14) \qquad Y(a, x; \lambda) = \prod_a^x (1 + P(t; \lambda)\, dt)$$

ableiten. Man findet

$$(12, 15) \qquad \frac{\partial Y(a, x; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^x Y(a, t; \lambda) \frac{\partial P(t; \lambda)}{\partial \lambda} Y(t, x; \lambda)\, dt\,.$$

In dem speziellen Fall

$$(12, 16) \qquad P(x; \lambda) = \lambda P(x)$$

wird die Formel besonders einfach:

$$(12, 17) \qquad \frac{\partial Y(a, x; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^x Y(a, t; \lambda)\, P(t)\, Y(t, x; \lambda)\, dt\,.$$

§ 13. Fundamental- und Partikularlösungen.

Eine Lösung von (9, 1) nennt man eine *Fundamentallösung*, wenn jede andere Lösung ein Produkt dieser Lösung und einer konstanten Matrix ist.

Da man nach (9, 4) schreiben kann

$$(13, 1) \qquad Y(x) = Y(a)\, Y(a, x)$$

und dies für jede Lösung gilt, ist $Y(a, x)$ eine Fundamentallösung.

Die Bedingung dafür, daß $Y_0(x)$ eine Fundamentallösung ist, kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Einmal kann man eine Konstante A finden, für die

$$Y(a, x) = A\, Y_0(x);$$

aber diese Konstante muß infolge (13, 1) gleich $Y_0^{-1}(a)$ sein, das also existieren muß. Existiert $Y_0^{-1}(a)$, dann ist infolge (13, 1)

$$(13, 2) \qquad Y(a, x) = Y_0^{-1}(a)\, Y_0(x)$$

und deswegen für eine beliebige Lösung

$$(13, 3) \qquad Y(x) = Y(a)\, Y_0^{-1}(a)\, Y_0(x)\,.$$

Es ist also die Existenz von $Y_0^{-1}(a)$ notwendig und hinreichend dafür, daß $Y_0(x)$ eine Fundamentallösung ist. Da indessen a eine beliebiger Punkt auf $\mathfrak{L}$ sein kann, so läßt sich die Bedingung auch so ausdrücken: es muß $Y_0^{-1}(x)$ existieren, d. h. Det. $Y_0(x) \neq 0$ sein für jedes x auf $\mathfrak{L}$, oder auch: es darf keine Konstante $A \neq 0$ geben, für die $A\, Y_0(x) = 0$ ist, in einem Punkte auf $\mathfrak{L}$.

Die Existenz von $Y^{-1}(a, x)$ geht aus (10, 3) hervor, und daß Det. $Y(a, x) \neq 0$ ist, folgt selbstverständlich hieraus, aber kann auch durch direkte Ausrechnung der Determinante bewiesen werden. Es ist nämlich

$$\text{Det. } Y(a, x) = \lim_{m \to \infty} \prod_0^{m-1} \text{Det. } (1 + P(a_\mu)\, \delta_\mu)$$

und

$$\text{Det. } (1 + P(t)\, \delta) = 1 + \sum_{i=1}^{m} p_{ii}(t) \cdot \delta + \cdots + \text{Det. } P(t) \cdot \delta^n = e^{\sum p_{ii}(t) \cdot \delta + \eta(t, \delta) \cdot \delta},$$

wobei $\eta(t, \delta) \rightrightarrows 0$, wenn $\delta \to 0$; folglich ist

$$(13, 4) \qquad \text{Det. } Y(a, x) = \exp. \left(\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(t)\, dt \right),$$

also überall dort $\neq 0$, wo $P(x)$ stetig ist.

Diese, von Jacobi [1] angegebene Formel, wurde beträchtlich verallgemeinert von Lappo Danilewski [1].

Ist $Y(x)$ nicht invertierbar und ev. rechteckig, dann hat sie infolge (13, 1) denselben Rang r für alle x, für die $\Sigma p_{ii}(x)$ stetig ist. Wir nennen sie dann eine *Partikularlösung vom Range r*. Durch Multiplikation von links mit einer passenden Vertauschungsmatrix wird sie auf die Form $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ gebracht, wo Y_1 nach rechts invertierbar ist und die Zeilen in Y_2 aus den Zeilen von Y_1 abgeleitet werden können. Y kann also durch eine Lösung von der Ordnung (r, n) ersetzt werden. Diese kann weiterhin in der Form $(1_r, 0_{n-r,r}) \cdot Y_0(x)$ geschrieben werden, wobei 1_r die Einheitsmatrix von der Ordnung r und $0_{n-r,r}$ die Nullmatrix von der Ordnung $(n - r, r)$, während $Y_0(x)$ eine Fundamentallösung ist. Durch Multiplikation von rechts mit einer passenden Vertauschungsmatrix läßt sich nämlich $Y_1(a)$ auf die Form (C_{11}, C_{12}) bringen, wo C_{11} invertierbar ist, und demnach zerlegt werden kann in

$$(1_r, 0_{n-r,r}) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei der zweite Faktor invertierbar ist. Das Produkt dieser, der Vertauschungsmatrix und $Y(a, x)$, ist somit eine Fundamentallösung.

Für eine Lösung von der Ordnung $(1, n)$ gebrauchen wir zuweilen die Bezeichnung *Vektorlösung*.

§ 14. Die Konvergenz des Produktintegrals.

Ist $P(x)$ auf $\mathfrak{L}$, ausgenommen im Punkte a, stetig, so nennt man das Produktintegral von a bis x konvergent, wenn

$$(14, 1) \qquad \prod_a^x (1 + P(t)\,dt) = \lim_{\xi \to a} \prod_\xi^x (1 + P(t)\,dt)$$

existiert und invertierbar ist. Die Bedingung dafür, daß dies der Fall ist, lautet:

$$(14, 2) \qquad \left| \prod_{\xi_1}^{\xi_2} (1 + P(t)\,dt) - 1 \right| < \varepsilon E$$

für alle ξ_1 und ξ_2 zwischen a und x, die hinreichend nahe bei a liegen.

Daß diese Bedingung notwendig ist, folgt aus (5, 5) und aus

$$Y(\xi_1, \xi_2) - 1 = (Y(\xi_1, x) - Y(\xi_2, x))\,Y(x, \xi_2).$$

Daß sie auch hinreicht, erkennt man aus den Relationen

$$Y(\xi_1, x) - Y(\xi_2, x) = (Y(\xi_1, \xi_2) - 1)\,Y(\xi_2, x)$$

und

$$Y(x, \xi_1) - Y(x, \xi_2) = Y(x, \xi_2)(Y(\xi_2, \xi_1) - 1).$$

Diese zeigen einmal, daß sowohl $Y(\xi, x)$ als auch $Y(x, \xi)$ für $\xi \to a$ beschränkt sind, dann, daß $Y(\xi_1, x) - Y(\xi_2, x)$ und $Y(x, \xi_1) - Y(x, \xi_2)$ beide $\to 0$, wenn ξ_1 und ξ_2 unabhängig voneinander gegen a konvergieren.

In der Praxis reicht oft das folgende Kriterium aus:

I. *Ist* $\int_a^x P(t)\,dt$ *absolut konvergent, so ist auch das Produktintegral konvergent und wird durch die Peanosche Entwicklung dargestellt* [1]).

[1]) Volterra [1], S. 54—55 beweist die Existenz des Produktintegrals unter der Voraussetzung

$$|P(t)| < \frac{cE}{|t - a|^{1-\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Die Peanoschen Entwicklungen für $Y(x, \xi)$ und $Y(\xi, x)$ sind nämlich gleichmäßig konvergent, da sie offenbar absolut konvergente von ξ unabhängige Majorantenreihen besitzen.

§ 15. Das unbestimmte Produktintegral.

Eine gegebene Lösung von (9, 1) kann natürlich jederzeit dargestellt werden als $Y(a) \cdot Y(a, x)$, mit passend gewähltem a, aber in gewissen Fällen ist eine andere Form der Darstellung wünschenswert.

Ist die Folge $(T_\mu(x))$ eine beliebige Lösung des Rekursionssystems

$$T'_\mu(x) = T_{\mu-1}(x) P(x),\ T_0(x) \text{ konstant}, \tag{15, 1}$$

so wird die Reihe

$$Y(x) = \sum_0^\infty T_\mu(x) \tag{15, 2}$$

augenscheinlich eine Lösung von (9, 1) darstellen, wenn sie gleichmäßig konvergiert. Das ist aber der Fall, wenn Konvergenz in einem einzigen Punkt stattfindet. Durch sukzessive Integrationen von (15, 1) für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ findet man nämlich

$$T_\mu(x) = \sum_0^\mu T_\nu(a) T_{\mu-\nu}(a, x)\,, \tag{15, 3}$$

so daß (15, 2) als das Cauchysche Produkt von $Y(a) = \sum_0^\infty T_\mu(a)$ und $Y(a, x) = \sum_0^\infty T_\mu(a, x)$ aufgefaßt werden kann. — Als Spezialfall von (15, 3) ergibt sich offenbar eine neue Rekursionsformel zwischen den Funktionen $T_\mu(a, x)$:

$$T_\mu(a, x) = \sum_0^\mu T_\nu(a, b) T_{\mu-\nu}(b, x)\,. \tag{15, 4}$$

Inwieweit das so gebildete „unbestimmte Produktintegral" eine Fundamentallösung ist, muß in jedem einzelnen Fall für sich untersucht werden. Doch für eine gewisse Klasse von solchen Bildungen läßt sich diese Frage allgemein entscheiden. Bildet man die $T_\mu(x) = (t_{ik}^{(\mu)}(x))$ durch die sukzessiven Integrationen

$$t_{ik}^{(\mu)}(x) = \int_{a_{ik}}^{x} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(\mu-1)}(\tau)\, p_{jk}(\tau)\, d\tau \tag{15, 5}$$

mit denselben endlichen unteren Grenzen für jedes μ, so hat man

$$t_{ik}^{(\mu)}(x) = \sum_{j_1, \ldots j_{\mu-1}=1}^{n} \int_{a_{ik}}^{x} dt_\mu \cdots \int_{a_{ij_1}}^{t_2} p_{ij}(t_1)\, p_{j_1 j_2}(t_2) \cdots p_{j_{\mu-1} k}(t_\mu)\, dt_1\,. \tag{15, 6}$$

Durch eine Schlußfolgerung analog zum Existenzbeweis in § 9, erkennt man nun, daß das hierdurch definierte Produktintegral als der Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} \prod_0^{m-1} (1 + (p_{ik}(a_{ik}^{(\mu)}) \delta_{ik}^{(\mu)})),\quad \delta_{ik}^{(\mu)} = a_{ik}^{(\mu+1)} - a_{ik}^{(\mu)} \tag{15, 7}$$

dargestellt werden kann. Dabei sind $a_{ik}^{(\mu)}$, $\mu = 1, \ldots m-1$ Punkte auf einem Kurvenstück, das $a_{ik}^{(0)} = a_{ik}$ mit $a_{ik}^{(m)} = x$ verbindet. Indem wir $A = (a_{ik})$ setzen, schreiben wir für das besagte Produktintegral

$$Y_A(x) = \prod_{(A)}^{x} (1 + P(t)\, dt) = \prod_{(A)}^{x} (1 + (p_{ik}(t)\, dt)) \tag{15, 8}$$

und weiterhin

$$T_\mu(x) = \int_{(A)}^{x} T_{\mu-1}(t)\, P(t)\, dt\,. \tag{15, 9}$$

Analog dem Beweis für (13, 4) beweist man leicht die entsprechende Formel

$$\text{(15, 10)} \qquad \text{Det. } Y_A(x) = \exp.\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{a_{ii}}^{x} p_{ii}(t)\,dt\right),$$

woraus die Invertierbarkeit von $Y_A(x)$ ersichtlich ist. — Übrigens kann man auch leicht $Y_A^{-1}(x)$ bilden:

$$\text{(15, 11)} \qquad Y_A^{-1}(x) = \lim_{m\to\infty} \overset{0}{\underset{m-1}{\Pi}} (1 - (p_{ik}(a_{ik}^{(\mu)})\,\delta_{ik}^{(\mu)}))\,,$$

und wir schreiben hierfür

$$\text{(15, 12)} \qquad Y_A^{-1}(x) = \overset{(A)}{\int_{x}} (1 - P(t)\,dt)\,.$$

Die Glieder seiner Peanoschen Entwicklung sind bestimmt durch die Rekursionsformel

$$\text{(15, 13)} \qquad \bar{T}_\mu(x) = \overset{(A)}{\int_{x}} P(t)\,\bar{T}_{\mu-1}(t)\,dt\,.$$

Für die Diskussion eines asymptotischen Problems der skalaren Gleichungen n-ter Ordnung verwendet Horn [3] S. 175 eine sukzessive Approximation, die mit der Bildung von $Y_A(x)$ äquivalent ist, wenn $a_{ik} = \begin{cases} a \geqq 0, & i \leqq k \\ \infty, & i > k \end{cases}$ gewählt wird. Man vergleiche übrigens auch § 27.

§ 16. Die adjungierte Gleichung.

Im folgenden soll die Variable auf dem oben besprochenen Kurvenstück $\mathfrak{L}$ liegen, und alle vorkommenden Funktionen sollen der Einfachheit halber, als überall differentiierbar angenommen werden. Weiterhin sollen, um die Formeln so übersichtlich wie möglich zu machen, dort, wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, die Variablen weggelassen werden, so daß im allgemeinen z. B. P und Y statt $P(x)$ bzw. $Y(x)$ oder $P(t)$ bzw. $Y(t)$ geschrieben wird.

Aus der Identität

$$\text{(16, 1)} \qquad (ST)' = S'T + ST'$$

folgt für $S = T^{-1}$,

$$\text{(16, 2)} \qquad (T^{-1})' = -\,T^{-1}\,T'\,T^{-1},$$

und hieraus erkennt man: wenn Y ein Fundamentallösung von

$$\text{(16, 3)} \qquad Y' = YP$$

ist, dann wird

$$\text{(16, 4)} \qquad (Y^{-1})' = -\,PY^{-1}.$$

Die Transposition dieser Gleichung zeigt weiter, daß

$$\text{(16, 5)} \qquad Z' = -\,ZP^{\bullet} = -\,Z \times P\ ^{1}),$$

die die zu (16, 3) *adjungierte Gleichung* genannt wird, die allgemeine Lösung

$$\text{(16, 6)} \qquad Z = C^{\bullet}Y^{\bullet -1}$$

hat, wobei C konstant ist. Diese Beziehung läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$YZ^{\bullet} = Y \times Z = C,$$

---

[1]) In diesem Paragraphen soll allgemein ein Stern bei einer Matrix deren transponierte Matrix bedeuten, und $\times$ die zeilenweise Multiplikation bezeichnen.

d. h. das zeilenweise gebildete Produkt von Y und Z ist eine Konstante. Speziell gilt für die Produktintegrale

$$Y(a, x) \times Z(a, x) = 1$$

oder auch

$$(16, 7) \qquad Y^*(x, a) = Z(a, x) = \int_a^x (1 - P^* dt).$$

Wenn Y, Z und P beliebige Matrizen und $W = YZ$ ist, kann man (16, 1) auch folgendermaßen schreiben:

$$(16, 8) \qquad W' = (Y' - YP)Z + Y(Z' + PZ).$$

Ist speziell Z ein Integral der Gleichung

$$Z' = -PZ,$$

dann bekommt man

$$W' = (Y' - YP)Z.$$

Bezeichnet außerdem Y ein Integral der inhomogenen Gleichung

$$Y' = YP + R,$$

so findet man wieder Formel (12, 3).

Die Relation (16, 8) schreibt man gewöhnlich in der Form [1])

$$(16, 9) \qquad (Y \times \mathsf{M})' = (Y' - YP) \times \mathsf{M} + Y' \times (\mathsf{M}' + \mathsf{M} \times P)$$

und stellt sie der Lagrangeschen Identität für eine skalare Gleichung n-ter Ordnung zur Seite. Befriedigt M die zu (16, 3) adjungierte Gleichung (16, 5), so bekommt man

$$(Y \times \mathsf{M})' = (Y' - YP) \times \mathsf{M}$$

und nennt M einen *Multiplikator* zur Differentialform $Y' - YP$.

§ 17. Derivation.

Für die *Derivation* [2])

$$(17, 1) \qquad D_x T = T^{-1} T'$$

gelten infolge (16, 1) und (16, 2) die Rechenregeln

$$(17, 2) \qquad D_x(ST) = T^{-1} \cdot D_x S \cdot T + D_x T$$

und

$$(17, 3) \qquad D_x T^{-1} = - T' T^{-1} = - T \cdot D_x T \cdot T^{-1}.$$

Speziell wird

$$(17, 4) \qquad D_x(AT) = D_x T,$$

wenn A eine Konstante ist.

Die Bedeutung dieser Operation beruht darauf, daß sie die Umkehrung der Produktintegration ist; ist Y ein Fundamentalintegral zu (16, 3), dann wird nämlich

$$(17, 5) \qquad D_x Y = P,$$

so daß

$$(17, 6) \qquad Y^{-1}(a)\, Y(x) = Y(a, x) = \int_a^x (1 + D_t\, Y(t)\, dt).$$

§ 18. Die Ω-Transformation.

Durch die Transformation

$$(18, 1) \qquad Y = ZT, \qquad Z = YT^{-1}$$

---

[1]) Vgl. Schlesinger [1] S. 33.

[2]) Volterra [1], S. 17—34 und Schlesinger [1], S. 26—28.

geht die Gleichung (17, 5) infolge (17, 2)und (17, 3) über in

$$D_x Z = TPT^{-1} - T'\,T^{-1}; \tag{18, 2}$$

für den Ausdruck auf der rechten Seite führen wir das Symbol

$$\Omega(P \mid T) = TPT^{-1} - T'\,T^{-1} = T(P - D_x T)\,T^{-1} \tag{18, 3}$$

ein und nennen ihn *die Ω-transformierte von P durch T*. Demzufolge kann man (18, 2) so schreiben:

$$Z' = Z\Omega(P \mid T). \tag{18, 4}$$

Für diese Transformationen gelten einige einfache Rechenregeln.

So ist

$$\Omega(0 \mid T) = D_x\,T^{-1} \tag{18, 5}$$

und

$$\Omega(P \mid A) = APA^{-1}, \tag{18, 6}$$

wenn A konstant ist. Die Ω-Transformation verallgemeinert also die Derivation und in gewissem Sinne auch die Transformation (2, 1), die dem Äquivalenzbegriff [1]) zugrunde liegt.

Wird in (18, 4)

$$Z = US$$

gesetzt, so hat man im ganzen

$$Y = U \cdot ST$$

gesetzt und findet die Kompositionsregel

$$\Omega(\Omega(P \mid T) \mid S) = \Omega(P \mid ST). \tag{18, 7}$$

Besonders erhält man für $S = T^{-1}$ ein gewisses Reziprozitätstheorem: Aus

$$\Omega(P \mid T) = Q \text{ folgt } \Omega(Q \mid T^{-1}) = P. \tag{18, 8}$$

Es geht dies im übrigen auch aus der Beziehung

$$\Omega(P \mid T^{-1}) = T^{-1}PT + T^{-1}\,T' \tag{18, 9}$$

hervor.

Schließlich sei bemerkt, daß

$$\Omega(P + Q \mid T) = \Omega(P \mid T) + TQT^{-1}, \tag{18, 10}$$

und

$$D_x(ST) = \Omega(D_x S \mid T^{-1}) \tag{18, 11}$$

ist, sowie, daß (16, 3) auch

$$\Omega(P \mid Y) = 0 \tag{18, 12}$$

geschrieben werden kann.

§ 19. Transformation des Produktintegrals.

Ist Y eine Fundamentallösung von (16, 3), so hat man infolge (18, 1)

$$Y^{-1}(a)\,Y(x) = T^{-1}(a)\,Z^{-1}(a)\,Z(x)\,T(x)$$

oder, bei Einführung des Produktintegrals [2])

$$\prod_a^x (1 + Pdt) = T^{-1}(a) \prod_a^x (1 + \Omega(P \mid T)\,dt)\,T(x). \tag{19, 1}$$

---

[1]) A. Loewy [1] hat eine tiefgehende Untersuchung der Äquivalenz vorgenommen, nach der zwei Matrizen P und Q äquivalent sind, wenn die eine aus der anderen durch eine Ω-Transformation hervorgeht, wobei die Elemente von T in demselben Rationalitätsbereich liegen wie die von P.

[2]) Vgl. Volterra [1], S. 50.

Eine andere Form bekommt man dadurch, daß man P durch $P + Q$ ersetzt und für T eine Fundamentallösung von (16, 3) wählt. Durch Anwendung der Additionsformel (18, 10) und von (18, 12) erhält man

$$(19,2)\qquad \int_a^x (1 + (P+Q)\,dt) = T^{-1}(a) \int_a^x (1 + TQT^{-1}\,dt)\,T(x).$$

Setzt man in die rechte Seite die Peanosche Reihe für das Produktintegral ein, so ergibt sich die Reihenentwicklung für eine Lösung der Gleichung

$$(19,3)\qquad Y' = Y(P+Q),$$

die Schlesinger [1], S. 36—45, durch die Methode der sukzessiven Approximationen abgeleitet hat. Dies geschieht so, daß man

$$(19,4)\qquad Y = \sum_0^\infty Y_\mu$$

setzt und die Glieder der Reihe durch die Rekursionsformel

$$(19,5)\qquad Y_0' = Y_0 P, \qquad Y_\mu' = Y_\mu P + Y_{\mu-1} Q$$

bestimmt, indem die inhomogenen Gleichungen durch die Formel (12, 3) mit gleichem a für alle μ gelöst werden.

Wir werden gelegentlich die Reihe in einer anderen Form benutzen, indem wir die Funktionen

$$(19,6)\quad V(x) = \int_a^x (1 + T(x,t)\,Q(t)\,T(t,x)\,dt), \qquad T(x,t) = T^{-1}(x)\,T(t),$$

einführen, so daß

$$(19,7)\qquad Y(a,x) = T(a,x)\,V(x).$$

Durch Anwendung der zweiten der Rekursionsformeln (11, 2) für die Glieder in der besagten Peanoschen Reihe findet man

$$(19,8)\qquad V(x) = \sum_0^\infty T_\mu(x),$$

wobei $T_0(x) = 1$ und

$$(19,9)\qquad T_{\mu+1}(x) = \int_a^x T(x,t)\,T_\mu(t)\,Q(t)\,T(t,x)\,dt, \qquad \mu \geqq 0.$$

Geht man von der differentiierten Rekursionsformel aus, so bekommt man

$$(19,10)\qquad T_{\mu+1}' - T_{\mu+1}P + PT_{\mu+1} = T_\mu Q.$$

Dem entspricht, daß V die Gleichung

$$(19,11)\qquad V' = V(P+Q) - PV$$

befriedigt.

§ 20. Die Transformationsgleichung.

Will man eine gegebene Gleichung (16, 3) in eine andere von derselben Form

$$(20,1)\qquad Z' = ZQ$$

transformieren, so handelt es sich offenbar darum, eine Lösung von

$$(20,2)\qquad \Omega(P \mid V) = Q$$

oder

$$(20,3)\qquad V' = VP - QV$$

zu bestimmen. Gleichungen dieser Art spielen deshalb bei vielen Problemen eine bedeutende Rolle.

Durch die Transformation

(20, 4) $$V = S^{-1}WT$$

geht (20, 3) über in

(20, 5) $$W' = W\Omega(P \mid T) - \Omega(Q \mid S)W.$$

Es ist nämlich

$$\Omega(P \mid WT) = \Omega(P \mid SV),$$

und nach der Kompositionsregel (18, 7) ist die linke Seite

$$= \Omega(\Omega(P \mid T) \mid W),$$

während die rechte Seite

$$= \Omega(\Omega(P \mid V) \mid S) = \Omega(Q \mid S)$$

ist; aus der Identität beider Ausdrücke folgt (20, 5) [1]).

Als Spezialfall dieser Transformation sei hervorgehoben, daß

(20, 6) $$Y = TZ$$

die Gleichung (16, 3) überführt in

(20, 7) $$Z' = ZP - D_xT \cdot Z.$$

Mit Hilfe von (20, 5) kann man die Form der allgemeinen Lösung von (20, 3) bestimmen. Bedeuten nämlich $T = Y$ und $S = Z$ Fundamentallösungen der Gleichungen (16, 3) und (20, 1), dann nimmt (20, 5) ie Form

$$W' = 0, \quad \text{d. h. } W = C$$

an, so daß die allgemeine Lösung

(20, 8) $$V = Z^{-1}CY$$

ist, wobei C eine willkürliche Konstante bedeutet [2]).

Für eine gegebene Lösung kann man die Konstante dadurch bestimmen, daß man $x = a$ setzt; es ergibt sich dann

(20, 9) $$V(x) = Z(x, a)V(a)Y(a, x).$$

Besonders sei bemerkt, daß die allgemeine Lösung der Gleichung

(20, 10) $$U' = UP - PU,$$

mit der wir uns weiter unten noch beschäftigen werden,

(20, 11) $$U = Y^{-1}CY = Y(x, a)U(a)Y(a, x)$$

ist; jede Lösung von (20, 10) ist also einer Konstanten äquivalent.

Ist V eine gegebene Lösung von (20, 3), dann kann man nach dem vorhergehenden S, T und C so bestimmen, daß

(20, 12) $$V = S^{-1}CT.$$

Infolge (20, 5) wird

(20, 13) $$C\Omega(P \mid T) = \Omega(Q \mid S)C,$$

und weiterhin ist leicht zu erkennen, daß, wenn S, T und C diese Relation befriedigen, V eine Lösung von (20, 3) ist. Man braucht nur die Gleichung

$$0 = C' = C\Omega(P \mid T) - \Omega(Q \mid S)C$$

dadurch zu transformieren, daß man

$$C = SVT^{-1}$$

---

[1]) Es sei angemerkt, daß Lagranges Identität (16, 8) auch so geschrieben werden kann:

$$W' = W\Omega(P \mid Z^{-1}) - \Omega(P \mid Y)W, \qquad W = YZ$$

und somit als ein Spezialfall von (20, 5) erscheint, nämlich für $Q = P$ und $V = 1$.

[2]) Schlesinger [2], S. 291.

setzt; man kommt dann infolge (20, 5) zu (20, 3). (20, 12), ergänzt durch die Bedingung (20, 13), die sich für $S = Z$, $T = Y$ auf eine Identität reduziert, ist also eine vollständige Lösung der betrachteten Gleichung in allgemeinerer Form als (20, 8).

Es mag noch bemerkt werden, daß, wenn

$$Y = \Phi T, \quad Z = \Psi S \tag{20, 14}$$

gesetzt wird, Φ und Ψ durch die Relation

$$C\Phi = \Psi C \tag{20, 15}$$

verbunden sind.

Ersetzt man in Gleichung (20, 3) Q durch $Q - RV^{-1}$, dann geht sie über in die inhomogene Gleichung

$$V' = VP - QV + R. \tag{20, 16}$$

Diese läßt sich durch die Transformation (20, 4) überführen in

$$W' = W\Omega(P \mid T) - \Omega(Q - RV^{-1} \mid S)W,$$

die aber unter Anwendung der Additionsformel (18, 10) zu

$$W' = W\Omega(P \mid T) - \Omega(Q \mid S)W + SRT^{-1} \tag{20, 17}$$

umgeschrieben werden kann. Wählt man ebenso wie in (20, 8) $T = Y, S = Z$, so bekommt man

$$W' = ZRY^{-1},$$

so daß die inhomogene Gleichung (20, 16) die Partikularlösung

$$V_1(a, x) = \int_a^x Z(x, t)\, R(t)\, Y(t, x)\, dt \tag{20, 18}$$

hat. Eine beliebige Lösung kann infolge (20, 9)

$$V(x) = V_1(a, x) + Z^{-1}(a, x) V(a)\, Y(a, x) \tag{20, 19}$$

geschrieben werden. (20, 18) enthält die beiden Formeln (12, 3) und (12, 5).

§ 21. Das Reduktionsproblem.

Die Integration einer Differentialgleichung kann man als ein doppeltes Problem auffassen: erstens die Transformation der Gleichung in die möglichst einfache Normalform, wobei die Transformatoren einer gegebenen Funktionsklasse angehören, und zweitens in eine darauf folgende Diskussion der Integration der Normalform.

Im allgemeinen geht das Reduktionsproblem darauf hinaus, eine Normalform

$$\mathsf{P}(x) = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathsf{P}_m(x) \end{pmatrix} \tag{21, 1}$$

hervorzubringen, wobei die $\mathsf{P}_i(x)$ nicht weiter reduzierbare quadratische Matrizen sind. Im günstigsten Fall sind sie alle von erster Ordnung, und man spricht dann von vollständiger Reduktion.

Es wird in theoretischen Untersuchungen oft übersichtlicher sein, die Reduktion schrittweise auszuführen, indem man zuerst P auf die Form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \tag{21, 2}$$

bringt und danach Q_1 und Q_2 auf dieselbe Art so weit wie möglich zu reduzieren versucht. Reduziert man z. B. Q_1 durch den Transformator T_1 zu $\begin{pmatrix} Q_1' & 0 \\ 0 & Q_1'' \end{pmatrix}$, so wird Q durch den Transformator $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ reduziert und multipliziert man diese mit dem Transformator, der P

in Q überführte, so haben wir eine Transformation, die P auf die Form

$$(21,3) \qquad \begin{pmatrix} Q_1' & 0 & 0 \\ 0 & Q_1'' & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

bringt. Und so kann man offenbar weitergehen, bis die Form $\mathsf{P}(x)$ erreicht ist. Das fundamentale Problem ist deshalb die Reduktion von P auf die Form Q, die *relative Reduktion.*

§ 22. Transformation mit Relativmatrizen.

Im § 1 wurde gezeigt, daß ein Transformator, der ja invertierbar ist, in das Produkt von einer Vertauschungsmatrix V und drei relativen Elementarmatrizen zerlegt werden kann:

$$(22,1) \qquad T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V,$$

wobei T_{11} quadratisch von der beliebigen Ordnung $r < n$ ist. Im Hinblick auf die Kompositionsregel müssen wir uns deshalb über die Wirkung einer Transformation mit jeder von diesen klar werden.

Die Transformation mit V bewirkt nur die Vertauschung einiger Zeilen und Spalten in P untereinander, aber so, daß die Diagonalelemente in der Diagonale bleiben.

Indem man P in $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ zerlegt und beachtet, daß

$$(22,2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & -T_{12} \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

bekommt man die wichtigen Transformationsformeln

$$(22,3) \qquad \Omega\left(P \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P_{11} + T_{12}P_{21}, & P_{12} - P_{11}T_{12} + T_{12}P_{22} - T_{12}P_{21}T_{12} - T_{12}' \\ P_{21}, & P_{22} - P_{21}T_{12} \end{pmatrix},$$

$$(22,4) \qquad \Omega\left(P \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P_{11} - P_{12}T_{21} & , \quad P_{12} \\ P_{21} - P_{22}T_{21} + T_{21}P_{11} - T_{21}P_{12}T_{21} - T_{21}', & P_{22} + T_{21}P_{12} \end{pmatrix},$$

$$(22,5) \qquad \Omega\left(P \,\middle|\, \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \Omega(P_{11} \mid T_{11}), & T_{11}P_{12}T_{22}^{-1} \\ T_{22}P_{21}T_{11}^{-1}, & \Omega(P \mid T_{22}) \end{pmatrix}.$$

Will man nun durch drei sukzessive Transformationen dieser Art eine relativ reduzierte Matrix hervorbringen, so muß offenbar die rechte Seite in (22, 3) *relativ halbreduziert* sein, d. h. das Element in der ersten Zeile rechts muß Null sein. T_{12} muß also die Gleichung

$$(22,6) \qquad T_{12}' = P_{12} + P_{11}T_{12} - T_{12}P_{22} - T_{12}P_{21}T_{12}$$

befriedigen [1]). Da die letzte Transformation die Reduktion nicht weiter befördert, muß, um die Reduktion zu vollenden, T_{21} eine Gleichung von der Form

$$(22,7) \qquad T_{21}' = Q_{21} - Q_{22}T_{21} + T_{21}Q_{11}$$

befriedigen.

Bei Anwendung dieses Prinzips muß man beachten, daß T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} nicht immer zu derselben Funktionenklasse wie T zu gehören brauchen, aber wie in einer weiteren Arbeit gezeigt werden soll, wird man bei wichtigen asymptotischen Integrationsproblemen T_{12} und T_{21} in dieser Klasse bestimmen können, während T_{11} und T_{22} gleich 1 gesetzt werden können.

---

[1]) Vgl. Schlesinger [1], S. 113, Gleichung (*D*).

§ 23. Relative Reduktion vermittels Partikularlösungen.

Kennt man zu $Y' = YP$ eine Partikularlösung vom Range r, so kann man die Integration durch Lösung einer Gleichung von der Ordnung $n - r$ und eine Quadratur ausführen.

Ist Y_{11} eine invertierbare Teilmatrix von r-ter Ordnung, so transformieren wir die Gleichung mit

$$T = \begin{pmatrix} Y_{11}, & Y_{12} \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & Y_{11}^{-1} Y_{12} \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \tag{23, 1}$$

und finden nach (22, 3) und (22, 5)

$$\Omega(P \mid T) = Q = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ Q_{21}, & & Q_{22} \end{pmatrix}, \tag{23, 2}$$

wobei

$$Q_{21} = P_{21} Y_{11}^{-1}, \quad Q_{22} = P_{22} - P_{21} Y_{11}^{-1} Y_{12}. \tag{23, 3}$$

Setzt man

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = ZT, \tag{23, 4}$$

dann wird

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \tag{23, 5}$$

also durch

$$Z'_{21} = Z_{22} Q_{21}, \; Z'_{22} = Z_{22} Q_{22} \tag{23, 6}$$

bestimmt, und weiterhin ist

$$Y_{21} = Z_{21} Y_{11}, \; Y_{22} = Z_{22} + Z_{21} Y_{12}. \tag{23, 7}$$

§ 24. Produktintegration durch Quadratur.

Wenn $P(x)$ und $T_1(a, x)$ permutabel sind, kann die Produktintegration auf die Quadratur zurückgeführt werden. Ist nämlich eine Funktion $F(x)$ mit ihrem Differentialquotienten permutabel, dann wird

$$\frac{d(F(x))^\mu}{dx} = \mu (F(x))^{\mu-1} F'(x),$$

und hieraus folgt durch Induktion

$$T_\mu(a, x) = \int_a^x T_{\mu-1}(a, t) \frac{\partial T_1(a, t)}{\partial t} \, dt = \frac{1}{\mu\,!} (T_1(a, x))^\mu, \tag{24, 1}$$

so daß [1])

$$Y(a, x) = \sum_0^\infty \frac{1}{\mu\,!} (T_1(a, x))^\mu = e^{T_1(a, x)} = e^{\int_a^x P(t)\, dt}. \tag{24, 2}$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist

$$P(x) = p(x) A, \tag{24, 3}$$

wobei A eine Konstante und $p(x)$ ein Skalar ist. Dann ist

$$Y(a, x) = e^{A \int_a^x p(t)\, dt}. \tag{24, 4}$$

Für $p(x) = \dfrac{1}{x}$ findet man

---

[1]) Peano [1] hat die Formel (24, 2) in dem wichtigen Spezialfall angegeben, wo $P(t_1)$ und $P(t_2)$ für beliebige t_1 und t_2 auf dem Integrationsweg permutabel sind.

$$(24,5)\qquad \prod_a^x \left(1 + A\,\frac{dt}{t}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)^A.$$

Wird in (24, 4) $A = E$ gesetzt, so bekommt man unter Anwendung von (7, 15) eine für Majorantenbetrachtungen recht nützliche Formel

$$(24,6)\qquad \prod_a^x (1 + p(t)\,E dt) = e^{E\int_a^x p(t)\,dt} = 1 + (e^{\int_a^x p(t)\,dt} - 1)\,E.$$

Eine andere Möglichkeit für die Quadratur liegt vor, wenn sich P als eine Relativmatrix zweiter Ordnung von der Form

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben läßt. Dann ist

$$P(t_1)\,P(t_2) = 0,$$

so daß die Peanosche Reihe bis auf die ersten zwei Glieder verschwindet. Man findet also

$$(24,7)\qquad \prod_a^x \left(1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix} dt\right) = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ \int_a^x P_{21}\,dt, & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist P relativ halbreduziert:

$$(24,8)\qquad P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

und kennt man die Produktintegrale

$$(24,9)\qquad T_{11}(a,x) = \prod_a^x (1 + P_{11}\,dt),\quad T_{22}(a,x) = \prod_a^x (1 + P_{22}\,dt),$$

so kann man $Y(a, x)$ transformieren mit

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

und danach durch Quadratur bestimmen [1]):

$$(24,10)\qquad \begin{cases} Y(a,x) = \prod_a^x \left(1 + \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ T_{22}\,P_{21}\,T_{11}^{-1}, & & 0 \end{pmatrix} dt\right) \cdot \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \\ \qquad = \begin{pmatrix} T_{11}(a,x) & , & 0 \\ \int_a^x T_{22}(a,t)\,P_{21}(t)\,T_{11}(t,x)\,dt, & & T_{22}(a,x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Allgemeiner kann die Produktintegration durch Quadratur ausgeführt werden, wenn P eine Relativmatrix von der Ordnung m und der Form

$$(24,11)\qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dann verschwinden in der Peanoschen Reihe alle Glieder von dem m-ten an. Wenn P also relativ halbreduziert ist, d. h. von der Form

[1]) Vgl. Schlesinger [1], S. 106—107.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}, \tag{24, 12}$$

so kann Y durch Quadratur bestimmt werden, wenn außerdem die Produktintegrale

$$T_{ii}(a, x) = \overset{x}{\underset{a}{\prod}} (1 + P_{ii}\, dt), \qquad i = 1, \ldots m$$

bekannt sind. Speziell kann die Produktintegration durch Quadratur ausgeführt werden, wenn P vollständig halbreduziert ist:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \tag{24, 13}$$

da ja

$$\overset{x}{\underset{a}{\prod}} (1 + p_{ii}\, dt) = e^{\int_a^x p_{ii} dt}$$

ist.

§ 25. Ungleichungen für das Produktintegral.

Ist $Q(t)$ eine für alle t auf $\mathfrak{L}$ reelle positive Matrix, für die

$$| P(t) | \leqq Q(t) \tag{25, 1}$$

ist, und setzt man

$$\begin{cases} \overline{Y}(a, x) = \overset{x}{\underset{a}{\prod}} (1 + Q(t) \mid dt \mid) \\ \qquad\quad = \sum_0^\infty \overline{T}_\mu(a, x) \\ \qquad\quad = \sum_0^m \overline{T}_\mu(a, x) + \overline{R}_m(a, x), \end{cases} \tag{25, 2}$$

so hat man offenbar

$$|\overline{T}_\mu(a, x)| \leqq \overline{T}_\mu(a, x), \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots \tag{25, 3}$$

und damit

$$|Y(a, x)| \leqq \overline{Y}(a, x); \tag{25, 4}$$

außerdem ist infolge (11, 6)

$$|R_m(a, x)| \leqq \int_a^x \overline{T}_m(a, t)\, Q(t)\, \overline{Y}(t, x) |\, dt\, | = \overline{R}_m(a, x). \tag{25, 5}$$

Ist speziell

$$|P(t)| \leqq p(t)\, E, \tag{25, 6}$$

so wird infolge (24, 6)

$$|Y(a, x)| \leqq 1 + (e^{\int_a^x p(t)\,|dt|} - 1)\, E. \tag{25, 7}$$

Diese Ungleichung, zusammen mit

$$|Y(a, x)|\, E \leqq e^{\int_a^x p(t)\,|dt|} \cdot E \tag{25, 8}$$

wurde von H. Fuhr [1, 2] angegeben.

Eine andere, von demselben Verfasser [1] herrührende Ungleichung ist eine Konsequenz der Formel (12, 13). Nimmt man an, daß

$$|P(t)| \leqq p(t)\,E,\ |R(t)| \leqq r(t)\,E, \tag{25, 9}$$

also

$$|Q(t)| = |P(t) + R(t)| \leqq (p(t) + r(t))\,E \tag{25, 10}$$

ist, hat man infolge (25, 8)

$$\begin{cases} |Y(a,x) - Z(a,x)| \leqq \int_a^x e^{\int_t^x (p(\tau)+r(\tau))|d\tau|}\cdot r(t)\,|dt|\cdot E \\ \qquad\qquad = e^{\int_a^x p(t)|dt|}\cdot\left(e^{\int_a^x r(t)|dt|} - 1\right)E \end{cases} \tag{25, 11}$$

Diese Ungleichungen können bedeutend verallgemeinert werden. Es sei $P(x)$ in eine Relativmatrix

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Diagonalelementen zerlegt, und jedes Element befriedige eine Ungleichung von der Form

$$|P_{ik}| \leqq g_{ik}\cdot E_{ik},$$

wobei g_{ik} positive Skalare sind und

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & \cdots & E_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{m1} & \cdots & E_{mn} \end{pmatrix}, \tag{25, 12}$$

also

$$|P_{ik}| \leqq (g_{ik}E_{ik}). \tag{25, 13}$$

Wir nennen dann $G = (g_{ik})$ eine *Majorante der Relativmatrix* $P = (P_{ik})$. Unter dieser Voraussetzung wird

$$W(a,x) = \int_a^x (1 + G(t)\,|dt|) \tag{25, 14}$$

eine Majorante für die Relativmatrix $|Y(a,x)| - 1$ sein, d. h.

$$\begin{cases} |Y_{ik}(a,x)| \leqq W_{ik}(a,x)\,E_{ik}, & i \neq k, \\ |Y_{ii}(a,x)| \leqq 1 + (W_{ii}(a,x) - 1)\,E_{ii}\ . \end{cases} \tag{25, 15}$$

Der Beweis hierfür beruht auf der Ungleichung

$$E_{ij}E_{jk} < E_{ik}$$

(vgl. (4, 11)), die mit sich bringt, daß das μ-te Glied in der Peanoschen Entwicklung für $W(a,x)$ eine Majorante für das entsprechende Glied in der Entwicklung für $Y(a,x)$ wird, falls dieses als Relativmatrix geschrieben wird.

Mit Hilfe der eben bewiesenen Ungleichung kann auch (25, 11) verallgemeinert werden. Sind $G_1(x)$ und $G_2(x)$ Majoranten für $P(x)$ bzw. $R(x)$, und setzt man

$$\begin{cases} W_1(a,x) = \int_a^x (1 + G_1(t)\,|dt|) \\ W_2(a,x) = \int_a^x (1 + (G_1(t) + G_2(t))\,|dt|)\ , \end{cases} \tag{25, 16}$$

dann wird

$$(25,17)\qquad \int_a^x W_1(a,t)\,G_2(t)\,W_2(t,x)\,|\,dt\,| = W_2(a,x) - W_1(a,x)$$

eine Majorante für $Y(a,x) - Z(a,x)$ sein. Führt man eine Ω-Transformation in W_2 aus, so bekommt man die direkte Erweiterung von (25, 11): die Majorante kann folgendermaßen geschrieben werden

$$(25,18)\qquad \Big(\prod_a^x (1 + W_1(a,t)\,G_2(t)\,W_1(t,a)\,|\,dt\,|) - 1\Big)\,W_1(a,x)\,.$$

Bei Anwendung passender Ω-Transformationen kann man oft nützliche Ungleichungen erhalten. Hier soll nur eine einzige erwähnt werden, die wir gleich benutzen wollen. Wir nehmen eine Ω-Transformation in $Y(a,x)$ vor, mit

$$T = \prod_a^x (1 + P_0\,dt) = e^{\int_a^x P_0(t)\,dt}\,,$$

wobei

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{11}, & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & ; & 0 & \cdots\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

und bekommen durch (19, 2) und (25, 4) [1])

$$|\,Y(a,x)\,| \leqq \prod_a^x (1 + |\,T(a,x)\,| \cdot |\,P(t) - P_0(t)\,| \cdot |\,T(t,a)\,|\,dt) \cdot |\,T_0(a,x)\,|\,.$$

Da

$$|\,T(a,x)\,| = e^{\int_a^x \Re P_0(t)\,dt}$$

ist, erhalten wir dadurch, daß wir zurücktransformieren

$$(25,19)\qquad |\,Y(a,x)\,| \leqq \prod_a^x (1 + \overline{P}\,dt)\,,$$

wo

$$(25,20)\qquad \overline{P} = \begin{pmatrix} \Re p_{11}, & |\,p_{12}\,| & \cdots & |\,p_{1n}\,| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |\,p_{n1}\,|, & |\,p_{n2}\,| & \cdots & \Re p_{nn} \end{pmatrix}$$

ist [2]).

Wir berücksichtigen hier noch das unbestimmte Produktintegral. Da die Ableitung der Ungleichungen (25, 3, 4, 5) und (25, 15) sich nur auf die Peanosche Entwicklung aufbaut, gelten die entsprechenden Ungleichungen auch für unbestimmte Produktintegrale, wenn nur $\overline{Y}(x)$ und $W(x)$ ähnlich wie $Y(x)$ gebildet werden. Besonders sei hervorgehoben, daß $|\,Y_A(x)\,| \leqq \overline{Y}_A(x)$ und daß $W_{\overline{A}}(x)$ bei geschickter Wahl von $\overline{A}$ eine Majorante für $Y_A(x)$ sein wird, wenn $G(x)$ eine Majorante für $P(x)$ ist.

---

[1]) dt wird hier der Einfachheit halber als reell und positiv angenommen.

[2]) Die Ungleichung kann auch unmittelbar aus der Definition des Produktintegrals abgeleitet werden:

$$|\,Y(a,x)\,| \leqq \lim_{m\to\infty} \prod_0^{m-1} |\,1 + P(a_\mu)\,\delta_\mu\,| = \lim_{m\to\infty} \prod_0^{m-1} (1 + \overline{P}(a_\mu)\,\delta_\mu + o(\delta_\mu))\,.$$

§ 26. Ein Grenzwertsatz.

Zur Anwendung der gefundenen Ungleichungen wollen wir zuerst einen Grenzwertsatz von Fuhr [1] beweisen:

I. *Wenn $(P_\nu(t))$ eine Folge integrierbarer Matrixfunktionen ist, die so gegen die ebenfalls integrierbare Matrixfunktion $P(t)$ konvergiert, daß*

$$\int_a^x | P_\nu(t) - P(t) | \cdot | dt | \to 0, \tag{26, 1}$$

dann wird

$$Y_\nu(a, x) = \int_a^x (1 + P_\nu(t)\, dt) \to \int_a^x (1 + P(t)\, dt) = Y(a, x) \text{ für } \nu \to \infty. \tag{26, 2}$$

Der Satz ergibt sich aus der Ungleichung

$$| Y_\nu(a, x) - Y(a, x) | \leqq e^{\int_a^x p(t)\,|dt|} \cdot (e^{\int_a^x \varepsilon_\nu(t)\, dt} - 1)\, E,$$

wo

$$| P(t) | \leqq p(t)\, E, \quad | P_\nu(t) - P(t) | \leqq \varepsilon_\nu(t)\, E,$$

die eine unmittelbare Folge von (25, 11) ist.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man eine eigentümliche Darstellung des Produktintegrales, die von Schlesinger [3] herrührt, ableiten. Wird $P(x)$ von stückweise konstanten Funktionen $P(t)$ approximiert, so kann $Y(a, x)$ in eine gewisse Anzahl von Produktintegralen zerlegt werden, die infolge (24, 5) durch Quadratur bestimmt werden können. Für $\nu \to \infty$ ergibt sich der Ausdruck

$$Y(a, x) = \lim_{m \to \infty} \prod_0^{m-1} e^{P(a_\mu)\, \delta_\mu}, \tag{26, 3}$$

worin die Bezeichnungsweise analog der in § 9 angewandten ist.

§ 27. Gleichungen mit asymptotisch konstantem Koeffizienten.

Seitdem die Poincarésche Abhandlung [1] erschienen ist, sind Gleichungen von der Form

$$Y'(x) = Y(x)\, P(x), \tag{27, 1}$$

wobei $P(x)$ eine für $x \geqq a > 0$ stetige Funktion ist, die für $x \to \infty$ einem Grenzwert A zustrebt, oft untersucht worden. Da ich beabsichtige, in einer späteren Arbeit die hierdurch entstandenen Fragen in größerem Zusammenhange zu erörtern, soll hier nur gezeigt werden, daß man mittels der Ungleichungen einige wichtige Sätze von Perron beweisen kann.

Wenn $\mathsf{P} = \mathsf{A}^{-1} A \mathsf{A}$ die Weierstrasssche Normalform von A ist, ersetzen wir Y durch $Y\mathsf{A}$; die Gleichung (27, 1) wird dadurch auf die Form

$$Y'(x) = Y(x)\,(\mathsf{P} + \mathsf{H}(x)), \quad \mathsf{H}(x) \to 0 \text{ für } x \to \infty \tag{27, 2}$$

gebracht.

Wir beweisen zuerst eine Ungleichung, die für jede Lösung dieser Gleichung gilt. Es ist

$$|Y(x)| \leqq |Y(a)| \cdot |Y(a, x)|, \tag{27, 3}$$

und weiter nach (25, 19)

$$|Y(a, x)| \leqq \int_a^x (1 + (\Re \mathsf{P} + |\mathsf{H}(t)|)\, dt).$$

Es bezeichne nun ϱ' die größten der reellen Teile der Eigenwerte und $\eta(x) \downarrow 0$ sei so gewählt, daß

$$(27,4) \qquad |\,\mathsf{H}(x)\,| \leqq \eta(x)\,E\,.$$

Indem weiter

$$(27,5) \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

folgt hieraus

$$(27,6) \qquad |\,Y(a,x)| \leqq \int_a^x (1 + (\varrho' + \Theta + \eta(t)\,E)\,dt) = e^{\varrho'(x-a)}\,\overline{V}(a,x)\,.$$

mit

$$(27,7) \qquad \overline{V}(a,x) = \int_a^x (1 + (\Theta + \eta(t)\,E)\,dt)\,.$$

Zur Abschätzung dieses Produktintegrals nehmen wir eine Transformation vor:

$$\overline{V}(a,x) = e^{-a\Theta} \int_a^x (1 + e^{\Theta t} E e^{-\Theta t} \eta(t)\,dt)$$

und setzen die Peanosche Reihe für das neue Produktintegral ein. Dadurch bekommen wir

$$(27,8) \qquad \overline{V}(a,x) = \sum_0^\infty \overline{V}_\mu(a,x)\,,$$

wobei

$$(27,9) \qquad \overline{V}_\mu(a,x) = \int_a^{x_{(\mu)}} e^{\Theta(t_1-a)} E e^{\Theta(t_2-t_1)} E \dots E e^{\Theta(x-t_\mu)} \eta(t_1) \dots \eta(t_\mu)\,dt_1 \dots dt_\mu.$$

Nun läßt sich offenbar zu jedem positiven ε eine Konstante γ derart bestimmen, daß

$$(27,10) \qquad e^{\Theta x} < \gamma e^{\varepsilon x} E \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Folglich gilt die Ungleichung

$$\overline{V}_\mu(a,x) < \gamma^{\mu+1} e^{\varepsilon(x-a)} \int_a^{x_{(\mu)}} \eta(t_1) \dots \eta(t_\mu)\,dt_1 \dots dt_\mu \cdot E = \gamma e^{\varepsilon(x-a)} \cdot \frac{(\gamma \int_a^x \eta(t)\,dt)^\mu}{\mu\,!} \cdot E\,,$$

und hieraus ergibt sich

$$(27,11) \qquad \overline{V}(a,x) < \gamma e^{\varepsilon(x-a) + \int_a^x \eta(t)\,dt} \cdot E.$$

Mit beliebig kleinem δ ist also

$$(27,12) \qquad |\,Y(a,x)| \leqq c e^{(\varrho'+\delta)(x-a)}\,E\,,$$

wobei c von δ, nicht aber von x und a abhängt [1]).

Durch Anwendung der Formel (16, 7) sieht man, daß

$$(27,13) \qquad |\,Y(x,a)| \leqq c e^{(-\varrho''+\delta)(x-a)}\,E\,,$$

wo ϱ'' der kleinste unter den reellen Teilen der Eigenwerte von P ist. Hieraus kann man eine untere Grenze für gewisse Elemente in $Y(a,x)$ ableiten. Da

$$1 \leqq |\,Y(a,x)| \cdot |\,Y(x,a)| \leqq c e^{(-\varrho''+\delta)(x-a)} \cdot |\,Y(a,x)|\,E$$

---

[1]) Perron [2], S. 28.

und

$$1 \leqq |Y(x,a)| \cdot |Y(a,x)| \leqq ce^{(-\varrho''+\delta)(x-a)} \cdot E\,|Y(a,x)|,$$

hat man nämlich sowohl

$$\sum_{j=1}^{n} |y_{jk}(a,x)| \geqq \frac{n}{c} \cdot e^{(\varrho''-\delta)(x-a)}, \tag{27,14}$$

als auch

$$\sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(a,x)| \geqq \frac{n}{c} \cdot e^{(\varrho''-\delta)(x-a)}. \tag{27,15}$$

Es gibt also in jeder Zeile und in jeder Spalte von $Y(a,x)$ mindestens *ein* Element $> \frac{1}{c} \cdot e^{(\varrho''-\delta)(x-a)}$ [1]).

Für spezielle Lösungen lassen sich viel bessere Ungleichungen ableiten. Wir setzen zuerst voraus, daß die reellen Teile $r_1, \ldots r_n$ der Eigenwerte von P ungleich sind und zwar, daß

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_n. \tag{27,16}$$

Wir wollen dann die Lösung

$$Y(x) = x^{\mathsf{P}}\, V_L(x) \tag{27,17}$$

betrachten, bei der

$$V_L(x) = \int_{(L)}^{x} (1 + e^{\mathsf{P}(t-x)}\mathsf{H}(t)\, e^{\mathsf{P}(x-t)}\, dt) = e^{-\mathsf{P}x} \int_{(L)}^{x} (1 + e^{\mathsf{P}t}\mathsf{H}(t)\, e^{-\mathsf{P}t}\, dt)\, e^{\mathsf{P}x} \tag{27,18}$$

(vgl. § 15) wobei

$$L = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ \infty & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \infty & \infty & \cdots & \infty & a \end{pmatrix}. \tag{27,19}$$

Wird

$$\overline{\mathsf{P}} = \Re\mathsf{P} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \tag{27,20}$$

gesetzt, dann gilt nach der Schlußbemerkung in § 25 die Ungleichung

$$|V_L(x)| \leqq \int_{(L)}^{x} (1 + e^{\overline{\mathsf{P}}(t-x)}\, E e^{\overline{\mathsf{P}}(x-t)}\, \eta(t)\,|\,dt\,|) = \overline{V}_L(x). \tag{27,21}$$

Die Glieder der Peanoschen Reihe für $\overline{V}_L(x)$ sind durch die Rekursionsformel

$$\overline{T}_{\mu+1}(x) = \int_{(L)}^{x} e^{\overline{\mathsf{P}}(t-x)}\, \overline{T}_\mu(t)\, E e^{\overline{\mathsf{P}}(t-x)}\, \eta(t)\,|\,dt\,|,\ \ \overline{T}_0(x) = 1 \tag{27,22}$$

bestimmt (vgl. (19, 9)). Um eine brauchbare Ungleichung für $\overline{V}_L(x)$ hervorzubringen, suchen wir die skalare Funktionenfolge $(\varphi_\mu(x))$ derart zu bestimmen, daß

$$\overline{T}_\mu(x) \leqq \varphi_\mu(x)\, E, \quad \mu \geqq 1, \quad \varphi_0(x) = 1\,. \tag{27,23}$$

Es muß dann

$$\overline{T}_{\mu+1}(x) \leqq \int_{(L)}^{x} e^{\overline{\mathsf{P}}(t-x)}\, E e^{\overline{\mathsf{P}}(x-t)}\, \varphi_\mu(t)\, \eta(t)\,|\,dt\,|\,.$$

Die Elemente der Matrix rechts sind teils

---

[1]) Vgl. Perron [1], S. 26.

$$\frac{1}{n}\int_a^x e^{(r_i-r_k)(t-x)}\varphi_\mu(t)\,\eta(t)\,dt \leqq \frac{1}{n}\int_a^x \varphi_\mu(t)\,\eta(t)\,dt \quad \text{für} \quad i \leqq k,$$

teils

$$\frac{1}{n}\int_x^\infty e^{-(r_k-r_i)(t-x)}\varphi_\mu(t)\,\eta(t)\,dt \leqq \frac{1}{n}\int_x^\infty e^{-\delta(t-x)}\varphi_\mu(t)\,\eta(t)\,dt \quad \text{für} \quad i > k,$$

wobei $\delta = \operatorname{Min} | r_k - r_i |$. Es genügt also

$$(28,24) \qquad \varphi_{\mu+1}(x) = \int_a^x \varphi_\mu(t)\eta(t)\,dt + \int_x^\infty e^{-\delta(x-t)}\varphi_\mu(t)\,\eta(t)\,dt$$

zu wählen. Zur Untersuchung dieser Folge führen wir die Funktion

$$(27,25) \qquad \varphi(x;\lambda) = \sum_0^\infty \varphi_\mu(x)\lambda^\mu$$

ein. Sie befriedigt die Integralgleichung

$$(27,26) \qquad \varphi(x;\lambda) = 1 + \lambda\int_a^x \varphi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt + \lambda\int_x^\infty e^{-\delta(t-x)}\varphi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt,$$

woraus man leicht die Differentialgleichung

$$(27,27) \qquad \varphi''(x;\lambda) = \delta\varphi'(x;\lambda) - \lambda\delta\eta(x)\varphi(x;\lambda)$$

ableitet. Für

$$(27,28) \qquad \sigma(x;\lambda) = (\log\varphi(x;\lambda))'$$

gilt dann die Riccatische Differentialgleichung

$$(27,29) \qquad \sigma'(x;\lambda) = \delta\sigma(x;\lambda) - \sigma^2(x;\lambda) - \lambda\delta\eta(x).$$

Die Glieder der Potenzreihe

$$(27,30) \qquad \sigma(x;\lambda) = \sum_1^\infty \sigma_\mu(x)\lambda^\mu$$

sind bestimmt durch die Rekursionsformeln

$$(27,31) \qquad \begin{cases} \sigma_\mu(x) = \delta\displaystyle\int_x^\infty e^{-\delta(t-x)}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sigma_{\mu-\nu}(t)\,\sigma_\nu(t)\,dt \\ \qquad = \delta\displaystyle\int_0^\infty e^{-\delta t}\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sigma_{\mu-\nu}(x+t)\,\sigma_\nu(x+t)\,dt \end{cases}$$

und

$$(27,31a) \qquad \sigma_1(x) = \delta\int_x^\infty e^{-\delta(t-x)}\eta(t)\,dt = \delta\int_0^\infty e^{-\delta t}\eta(x+t)\,dt.$$

Durch Induktion erkennt man, daß jedes $\sigma_\mu(x)$ monoton abnimmt, und hieraus ergeben sich die Ungleichungen

$$(27,32) \qquad \sigma_\mu(x) < \bar{\sigma}_\mu(x), \quad \mu \geqq 1,$$

wobei

$$(27,33) \qquad \bar{\sigma}_1(x) = \eta(x) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\bar{\sigma}_{\mu-\nu}(x)\,\bar{\sigma}_\nu(x), \qquad \mu \geqq 2.$$

Die Funktion

$$(27,34) \qquad \bar{\sigma}(x;\lambda) = \sum_1^\infty \bar{\sigma}_\mu(x)\lambda^\mu$$

befriedigt die quadratische Gleichung

$$(27,35) \qquad \bar{\sigma}(x;\lambda) = (\bar{\sigma}(x;\lambda))^2 + \lambda\eta(x),$$

so daß

$$(27,36) \qquad \bar{\sigma}(x;\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\lambda\eta(x)}).$$

Da $\bar{\sigma}(x;\lambda)$ für $|\lambda| < \frac{1}{4\eta(x)}$ eine reguläre analytische Funktion von λ ist, wird auch $\sigma(x,\lambda)$ und $\varphi(x;\lambda)$ regulär in diesem Kreis sein. Damit haben wir die Existenz von $V_L(x)$ unter der Voraussetzung

$$\eta(x) < \frac{1}{4} \tag{27,37}$$

bewiesen, und weiter ergibt sich die Ungleichung

$$|V_L(x)| \leqq e^{a}{}^{\int_a^x \bar{\sigma}(t)\,dt} \cdot E, \quad \bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}(t;1). \tag{27,38}$$

— Es sei übrigens bemerkt, daß

$$\bar{\sigma}(x) = \eta(x) + O(\eta^2(x)) \tag{27,39}$$

und somit

$$\int_a^x \bar{\sigma}(t)\,dt = \int_a^x \eta(t)\,dt \cdot (1 + o(1)) = o(x). \tag{27,39a}$$

Ganz analog beweist man für

$$V_L^{-1}(x) = \int_x^{(L)} (1 - e^{\mathsf{P}(t-x)}\,\mathsf{H}(t)\,e^{\mathsf{P}(x-t)}\,dt) \tag{27,40}$$

(vgl. (15, 12)) die Ungleichung

$$|V_L^{-1}(x)| \leqq e^{\int_a^x \bar{\sigma}(t)\,dt} \cdot E, \tag{27,41}$$

woraus man schließt, daß es sowohl in jeder Zeile als auch in jeder Spalte von $V_L(x)$ mindestens *ein* Element $> e^{\int_a^x \bar{\sigma}(t)\,dt}$ gibt.

Der allgemeine Fall, bei dem keine Voraussetzungen über die Eigenwerte von P gemacht werden, läßt sich mit fast derselben Methode erledigen.

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{P}_m \end{pmatrix} \tag{27,42}$$

wird so geordnet und eingeteilt, daß die Eigenwerte von P_i denselben reellen Teil r_i haben und weiter

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_m. \tag{27,43}$$

Wir betrachten dann die Lösung (27, 17), wo diesmal

$$L = (L_{ik}), \tag{27,44}$$

und L_{ii} eine quadratische Matrix von derselben Ordnung wie P_i ist, und die Elemente von L_{ik} gleich a oder ∞ sind, je nachdem $i \leqq$ oder $> k$ ist.

Wird

$$\bar{\mathsf{P}} = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & r_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}\bar{\mathsf{P}} = \bar{\mathsf{P}} + \Theta \tag{27,45}$$

gesetzt, so genügt das Polynom $e^{\Theta x} E e^{\Theta x}$ für $x > 0$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ der Ungleichung

$$e^{\Theta x} E e^{\Theta x} < \gamma e^{\varepsilon x} E, \tag{27,46}$$

wenn $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ passend gewählt ist. Es ist also

$$|V_L(x)| \leqq \bar{V}_L(x) = \int_{(L)}^x (1 + \gamma e^{\bar{\mathsf{P}}(t-x)} E e^{\bar{\mathsf{P}}(x-t)}\, e^{\varepsilon|x-t|}\, \eta(t)\,|dt|). \tag{27,47}$$

In den vorhergehenden Erörterungen ersetzen wir also einfach $\eta(t)$ durch $\gamma e^{\varepsilon|x-t|}\eta(t)$. Die (27, 26) entsprechende Integralgleichung lautet dann

$$(27,48)\qquad \varphi(x;\lambda) = 1 + \lambda\gamma\int_a^x e^{\varepsilon(x-t)}\varphi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt + \lambda\gamma\int_x^\infty e^{-(\delta-\varepsilon)(t-x)}\varphi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt.$$

Die Funktion $\psi(x;\lambda) = e^{-\varepsilon x}\varphi(x;\lambda)$ befriedigt die Gleichung

$$(27,49)\qquad \psi(x;\lambda) = e^{-\varepsilon x} + \lambda\gamma\int_a^x \psi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt + \lambda\gamma\int_x^\infty e^{-(\delta-2\varepsilon)(t-x)}\psi(t;\lambda)\,\eta(t)\,dt$$

und hat wegen $e^{-\varepsilon x} < 1$ die oben gefundene Lösung von (27, 26) als Majorante, wenn λ durch $\lambda\gamma$ und δ durch $\delta - 2\varepsilon$ ersetzt wird.

Hieraus folgt

$$(27,50)\qquad |\,V_L(x)\,| < e^{(\varepsilon+o(1))x}\,E.$$

Dieses Ergebnis läßt sich aber sofort zu

$$(27,51)\qquad |\,V_L(x)\,| < e^{o(x)}\,E$$

verschärfen.

Hierzu bemerken wir erstens, daß — mit naheliegenden Bezeichnungen —

$$(27,52)\qquad V_{L(a)}(x) = e^{-\mathsf{P}x}\,C(a,b)\,e^{\mathsf{P}x}\,V_{L(b)}(x),$$

wobei die Konstante

$$(27,53)\qquad C(a,b) = \prod_{L(a)}^{L(b)}(1 + e^{\mathsf{P}t}\,\mathsf{H}(t)e^{-\mathsf{P}t}\,dt)$$

sich als eine relativ halbreduzierte Matrix erweist. Sie ist nämlich als der Grenzwert

$$(27,54)\qquad \lim_{c\to\infty}\prod_{L(a,c)}^{L(b,c)}(1 + e^{\mathsf{P}t}\,\mathsf{H}(t)\,e^{-\mathsf{P}t}\,dt)$$

aufzufassen, indem

$$L(a,c) = (L_{ik}(a,c)),\quad L_{ik}(a,c) = \begin{cases} a, & i \leqq k \\ c, & i > k \end{cases}.$$

Wird nun $\mathsf{H}(t)$ ähnlich wie P eingeteilt,

$$\mathsf{H}(t) = (\mathsf{H}_{ik}(t)),$$

so läßt sich der Produktintegrand in (27, 54) in der Form

$$1 + (e^{\mathsf{P}_i t}\,\mathsf{H}_{ik}(t)\,e^{-\mathsf{P}_k t}\,dt)$$

schreiben [vgl. (15, 8) und (15, 7)], und hier muß offenbar für $i > k$ $\quad dt = 0$ gesetzt werden. Bezeichnet $\bar{\mathsf{H}}(t)$ diejenige Matrix, in die sich $\mathsf{H}(t)$ verwandelt, wenn jedes $\mathsf{H}_{ik}(t)$ mit $i > k$ durch 0 ersetzt wird, so ist also das Produktintegral in (27, 54) unabhängig von c und gleich

$$(27,55)\qquad C(a,b) = \prod_a^b(1 + e^{\mathsf{P}t}\,\bar{\mathsf{H}}(t)\,e^{-\mathsf{P}t}\,dt) = (C_{ik}(a,b))$$

mit $C_{ik}(a,b) = 0$ für $i > k$. Der Faktor von $V_{L(b)}(x)$ in (27, 52) ist somit

$$(e^{-\mathsf{P}_i x}\,C_{ik}(a,b)\,e^{\mathsf{P}_k x}) = O(x^\varkappa),$$

wobei $\varkappa$ eine passend gewählte ganze Zahl ist.

Weiter bemerken wir, daß die Herleitung der Ungleichung (27, 50) nach (27, 37) $\gamma\eta(a) < \frac{1}{4}$ voraussetzt. Nachdem ε gewählt ist, bestimmen wir also ein b derart, daß $\gamma\eta(b) < \frac{1}{4}$ ist; aus (27, 52) und (27, 50) ergibt sich dann

(27, 56) $$V_{L(a)}(x) = O(e^{\varepsilon x})$$

für beliebig kleines ε. Bezeichnet $v_{ik}(x)$ die Elemente in $V_L(x) = V_{L(a)}(x)$, so hat man also

(27, 57) $$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log |v_{ik}(x)|}{x} \leqq 0,$$

und aus dem entsprechenden Ergebnis für $V_L^{-1}(x)$ schließt man weiter, daß es sowohl in jeder Zeile als auch in jeder Spalte mindestens *ein* Element gibt, für das

(27, 58) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log |v_{ik}(x)|}{x} = 0.$$

In bezug auf die Anwendungen ist es nützlich zu bemerken, daß es für unsere Überlegungen durchaus nicht wesentlich ist, daß P gerade eine Weierstraßsche Normalform ist, es genügt, wenn es eine halbreduzierte Matrix ist. Die einzige hinzukommende Schwierigkeit rührt daher, daß Θ nun nicht mehr permutabel mit $\overline{\mathsf{P}}$ zu sein braucht. Man kann sie aber dadurch umgehen, daß man in der Definition (27, 18) von $V_L(x)$ die Exponentialfunktion $e^{\mathsf{P}x}$ durch eine passend gewählte Lösung der Gleichung

(27, 59) $$\Phi' = \Phi\mathsf{P}$$

ersetzt. Man wähle z. B.

(27, 60) $$\Phi(x) = e^{\mathsf{P}_0 x} \cdot \int_{(L)}^{x} (1 + e^{\mathsf{P}_0(t-x)}\Theta e^{\mathsf{P}_0(x-t)}\, dt) = e^{\mathsf{P}_0 x}\, \Psi_L(x),$$

wobei P_0 diejenige Diagonalmatrix bedeutet, die dieselbe Diagonale wie P besitzt, und L durch (27, 44) definiert ist. Da die Peanoschen Reihen für $\Psi_L^{\pm 1}(x)$ nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten — man vergleiche den Schluß von § 24 — weist man leicht nach, daß diese Funktionen $O(x^{n-1})$ sind, und das genügt für unsere Überlegungen.

Ist nun eine skalare Gleichung n-ter Ordnung mit asymptotisch konstantem Koeffizienten

(27, 61) $$y^{(n)} + (a_1 + \varepsilon_1(x))\, y^{(n-1)} + \cdots + (a_n + \varepsilon_n(x))\, y = 0$$

gegeben, so ersetzt man sie durch das Gleichungssystem erster Ordnung

(27, 62) $$\begin{cases} y_1' &= \varrho_1 y_1 + y_2 \\ y_2' &= \varrho_2 y_2 + y_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}' &= \varrho_{n-1} y_{n-1} + y_n \\ y_n' &= \varrho_n y_n + \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_n y_n, \end{cases}$$

wobei die η_j lineare Verbindungen von den ε_j sind und $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln der determinierenden Gleichung

(27, 63) $$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

bezeichnen. Da die Differentialquotienten von y leicht angebbare lineare Verbindungen der y_j sind, ergibt sich sofort aus (27, 57) und (27, 58) der Perronsche Fundamentalsatz [1], S. 46:

I. *Es existiert ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots y_n$ zu* (27, 61), *derart, daß für jedes i erstens*

(27, 64) $$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log |y_i^{(k)}(x)|}{x} \leqq \Re\varrho_i, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und zweitens

(27, 65) $$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\log |y_i^{(k)}(x)|}{x} = \Re\varrho_i$$

für mindestens ein $k \leqq n - 1$.

Kapitel III.
Gleichungen mit analytischen Koeffizienten.

§ 28. Mehrdeutigkeit der Lösungen in einem Bereich. Windungsfunktionen.

Im folgenden soll die Funktion $P(x)$ nicht nur auf einer Kurve $\mathfrak{L}$ gegeben sein, sondern in einem Bereich $\mathfrak{A}$, in dem sie eindeutig und regulär analytisch ist.

Ist $\mathfrak{A}$ einfach zusammenhängend, so sind die Glieder in der Peanoschen Reihe für $Y(a, x)$ regulär und nur von den Integrationsgrenzen abhängig und nicht von der speziellen Kurve in $\mathfrak{A}$, die sie verbindet. Hieraus folgt der Satz (Volterra [2], S. 22]).:

I. *Wenn $P(x)$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich regulär ist, dann wird $Y(a, x)$ es auch sein, und ist $\mathfrak{L}$ eine beliebige geschlossene Kurve in seinem Innern, so wird*

$$\int_{\mathfrak{L}} (1 + P(t)\,dt) = 1\,. \tag{28, 1}$$

Wenn $\mathfrak{A}$ nicht einfach zusammenhängend ist, dann wird $Y(a, x)$ im allgemeinen mehrdeutig sein.

Ist x' ein Punkt über x auf der Riemannschen Fläche über $\mathfrak{A}$, so kann man den Integrationsweg von a nach x' infolge des eben bewiesenen Satzes durch den Punkt a' legen, der in derselben Weise über a liegt, wie x' über x. Hieraus folgt

$$Y(a, x') = Y(a, a')\,Y(a', x')\,.$$

Setzt man

$$U(x) = Y(x, x') \tag{28, 2}$$

und beachtet, daß aus der Eindeutigkeit von $P(x)$

$$Y(a', x') = Y(a, x) \tag{28, 3}$$

folgt, so hat man die Beziehung

$$Y(a, x') = U(a)\,Y(a, x)\,, \tag{28, 4}$$

welche die Mehrdeutigkeit von $Y(a, x)$ charakterisiert.

Betrachtet man eine beliebige Fundamentallösung $Y(x)$, so ist $Y(x') \equiv \overline{Y}(x)$ offenbar auch eine Fundamentallösung. Die Konstante C in der daraus folgenden Beziehung

$$Y(x') = C\,Y(x) \tag{28, 5}$$

kann dadurch bestimmt werden, daß man $Y(x)$ durch $Y(a, x)$ ausdrückt; man bekommt dann

$$C = Y(a)\,U(a)\,Y^{-1}(a)\,. \tag{28, 6}$$

In einem gegebenen Bereich lassen sich im allgemeinen unendlich viele Funktionen von der Form $U(x)$, die wir *Windungsfunktionen* nennen wollen, definieren. Diese Funktionen bilden offenbar eine Gruppe, die aus einfachen Windungsfunktionen zusammengesetzt werden kann. Jede Kurve von endlicher Länge auf der Riemannschen Fläche über $\mathfrak{A}$, die x mit einem Punkte über x verbindet, kann man nämlich deformieren und dann in eine Reihe von Kurven auflösen, deren Projektionen auf die x-Ebene jede eine Windung um eine Randkurve in $\mathfrak{A}$ beschreiben. Nennt man die Windungsfunktion, die die ν-te Randkurve einmal in positiver Richtung umschlingt, $U_\nu(x)$, so wird die betrachtete Windungsfunktion in Faktoren $U_\nu^{\pm 1}(x)$ aufgelöst. Speziell sei bemerkt, daß für einen doppelt zusammenhängenden Bereich alle Windungsfunktionen Potenzen von einer einzigen sind, da die Windungsfunktion, die p Windungen um die innere Randkurve des Bereichs entspricht, die p-te Potenz derjenigen ist, die einer Windung entspricht.

Die angeführte Gruppe von Windungsfunktionen bildet einen Teil eines Funktionenkörpers. Die Windungsfunktionen befriedigen nämlich infolge (10, 6) die Differential-

gleichung

$$U'(x) = U(x)P(x) - P(x)U(x), \tag{28, 7}$$

die infolge (20, 11) die Lösungen

$$U(x) = Y^{-1}(a, x)\, C\, Y(a, x) \tag{28, 8}$$

hat, wo C alle Konstanten durchläuft, und hieraus folgt, daß Summe und Produkt zweier Lösungen wieder eine Lösung ist, sowie, daß die reziproke Matrix zu einer invertierbaren Lösung auch eine Lösung ist; schließlich wird die Gleichung auch von der Einheitsmatrix befriedigt.

Hieraus folgt unter anderem, daß auch $(\varrho - U(x))^{-1}$ eine Lösung sein wird, wenn $U(x)$ eine beliebige Lösung und ϱ ein skalarer Parameter ist. Weiterhin sieht man, indem man $(\varrho - U(x))^{-1}$ in Partialbrüche zerlegt,

$$(\varrho - U(x))^{-1} = \sum\sum \frac{U_{j\mu}(x)}{(\varrho - \varrho_j)^{\mu+1}}, \tag{28, 9}$$

daß die Funktionen $U_{j\mu}(x)$ die Gleichung deshalb befriedigen, weil die Eigenwerte von $U(x)$ unabhängig von x sind.

§ 29. Die Darstellung der Lösungen in einem doppelt zusammenhängenden Bereich.

Wenn $\mathfrak{A}$ doppelt zusammenhängend ist, wird die Mehrdeutigkeit einer Fundamentallösung vollständig charakterisiert durch *eine* Beziehung

$$Y(x') = C\, Y(x), \tag{29, 1}$$

wo x' über x auf der Riemannschen Fläche über $\mathfrak{A}$ liegt. Setzt man

$$A = \frac{1}{2\pi i} \log C, \tag{29, 2}$$

wobei man den Logarithmus beliebig wählen kann, dann wird x^A mehrdeutig von derselben Art sein, vorausgesetzt daß $x = 0$ innerhalb der inneren Randkurve von $\mathfrak{A}$ liegt. Daraus folgt, daß $x^{-A}\, Y(x)$ eindeutig in $\mathfrak{A}$ ist. Hat A die Normalform P, so gibt es eine Fundamentallösung, die man

$$Y(x) = x^{\mathsf{P}}\, V(x) \tag{29, 3}$$

schreiben kann, wo $V(x)$ eindeutig in $\mathfrak{A}$ ist.

P ist im Vorhergehenden durch den Wert einer Windungsfunktion in einem einzelnen Punkt bestimmt. Um weiterhin $V(x)$ eine solche Form zu geben, daß deren Eindeutigkeit in $\mathfrak{A}$ sofort zu erkennen ist, machen wir Gebrauch von einem Kunstgriff, der im Prinzip von Frobenius [1] herrührt.

Da $x' = x \cdot e^{2\pi i}$ ist, zeigt man durch direkte Ausrechnung, daß

$$Y(x; \varrho) = \int_x^{x'} t^{\varrho-1}\, Y(t, x')\, dt \cdot (e^{2\pi i\varrho} - U(x))^{-1} \tag{29, 4}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$Y'(x) = Y(x)\, P(x) + x^{\varrho-1}, \tag{29, 5}$$

ist, wobei ϱ einen komplexen Parameter bezeichnet. Bei der Ausrechnung kann man benutzen, daß $(e^{2\pi i\varrho} - U(x))^{-1}$ die Differentialgleichungen (28, 7) der Windungsfunktionen befriedigt.

Um Lösungen der homogenen Gleichung zu finden, sei bemerkt, daß die Eigenwerte $\varrho_1, \ldots \varrho_m$ von

$$\mathfrak{U}(x) = \frac{1}{2\pi i} \log U(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot Y^{-1}(a, x) \cdot \log U(a) \cdot Y(a, x) \tag{29, 6}$$

unabhängig von x sind, und daß $Y(x; \varrho)$ als Funktion von ϱ meromorph ist, mit den Polen

in den Punkten $\varrho_j + \nu$, $\begin{matrix} j = 1, \ldots m \\ \nu = 0, \pm 1, \ldots \end{matrix}$ oder doch in einigen davon. Hieraus folgt, daß das *Residuum von* $Y(x; \varrho)$ *in einem beliebigen Pol eine Lösung von*

$$Y'(x) = Y(x)\, P(x) \tag{29, 7}$$

ist.

Dabei machen sich nun zwei bedeutungsvolle Verhältnisse geltend: *Einerseits kann man mit einer endlichen Anzahl dieser Partikularlösungen eine Fundamentallösung aufbauen, und andererseits ist jede einzelne Lösung ein Produkt von einem* x^{ϱ_j} *und einem Polynom in log* x*, dessen Koeffizienten in* $\mathfrak{A}$ *eindeutige Funktionen sind, so daß man eine Lösung von der Form* (29, 3) *konstruieren kann.*

Um das erste zu erkennen, berechnen wir

$$Y_\nu(x) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{\varrho=\varrho_j+\nu} Y(x; \varrho) = \sum_{j=1}^{m} Y_{\nu j}(x). \tag{29, 8}$$

Hierzu sei einmal bemerkt, daß man (29, 4) auch

$$Y(x; \varrho) = \int_x^{x'} Y(t, x)\, t^{\varrho-1}\, dt \cdot (e^{2\pi i(\varrho - \mathfrak{U}(x))} - 1)^{-1} \tag{29, 4a}$$

schreiben kann, und dann, daß man bei passender Wahl von $\mathfrak{U}(x)$ — nämlich so, daß $\varrho_1, \ldots \varrho_m$ keine ganzzahligen Differenzen $\neq 0$ haben — für die Bildung der Residuensumme $Y_\nu(x)$, den Faktor des Integrals durch $\frac{1}{2\pi i}(\varrho - \nu - \mathfrak{U}(x))^{-1}$ ersetzen kann. Nach (7, 1) hat man also

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_x^{x'} Y(t, x)\, t^{\mathfrak{U}(x)+\nu-1}\, dt. \tag{29, 9}$$

Nun weiß man ja im voraus, daß die Gleichung (29, 7) eine Lösung von der Form (29, 3) hat, und daraus schließt man leicht, daß mit passend gewähltem A

$$\mathfrak{U}(x) = Y^{-1}(x)\, \mathsf{P}\, Y(x) \tag{29, 6a}$$

ist. Somit haben wir

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_x^{x'} Y^{-1}(t)\, t^{\mathsf{P}+\nu-1}\, dt \cdot Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_x^{x'} V^{-1}(t)\, t^{\nu-1}\, dt \cdot Y(x) = B_\nu Y(x), \tag{29, 10}$$

wo B_ν der Koeffizient zu a^ν in der formell gebildeten Laurentreihe in $\mathfrak{A}$ für $V^{-1}(a)$ ist. Diese Reihe ist nach Mittag-Leffler [1]) wenigstens in $\mathfrak{A}$ summierbar, indem z. B.

$$V^{-1}(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_\nu a^\nu}{\Gamma\left(\frac{|\nu|}{k} + 1\right)} \tag{29, 11}$$

ist. Wie man leicht einsieht, kann man diesen Ausdruck durch

$$V^{-1}(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{-k!}^{+k!} \frac{B_\nu a^\nu}{\Gamma\left(\frac{|\nu|}{k} + 1\right)}, \tag{29, 11a}$$

ersetzen, und da $V^{-1}(a)$ invertierbar ist, muß der Ausdruck unter dem lim-Zeichen es auch sein, wenn k hinreichend groß gewählt ist (vgl. § 5, Schluß). Aber hieraus folgt, daß, mit solchem k,

$$\sum_{-k!}^{+k!} Y_\nu(x) \frac{a^\nu}{\Gamma\left(\frac{|\nu|}{k} + 1\right)}$$

[1]) Atti del IV Congresso Mat. Roma 1908, S. 82.

eine Fundamentallösung ist, was mit sich bringt, daß die *Sammlung von den Matrizen* $Y_{\nu j}(x)$, $j = 1, \ldots m$, $\nu = 0, \pm 1, \ldots \pm k!$ *n linear unabhängige Vektorlösungen enthalten.*

Durch Anwendung der dritten kanonischen Form (8, 10) von $t^{\mathfrak{U}(x)}$ bekommt man

$$(29, 12) \qquad Y_{\nu j}(x) = x^{\varrho_j+\nu} \cdot \sum \frac{1}{2\pi i} \int_1^{1'} Y(xt, x)\, t^{\varrho_j+\nu-1} (\log t + \log x)^{\mu}\, dt \cdot \frac{\mathfrak{U}_{j\mu}(x)}{\mu!},$$

indem

$$(29, 13) \qquad (\varrho - \mathfrak{U}(x))^{-1} = \sum\sum \frac{\mathfrak{U}_{j\mu}(x)}{(\varrho - \varrho_j)^{\mu+1}}.$$

Da nun sowohl $\mathfrak{U}_{j\mu}(x)$ als auch

$$(29, 14) \qquad Y(xt, x) = \int_i^1 (1 + xP(x\tau)\, d\tau)$$

eindeutig in $\mathfrak{A}$ sind, sieht man, daß der Faktor zu x^{ϱ_j} ein Polynom in $\log x$ ist, wobei die Koeffizienten eindeutig in $\mathfrak{A}$ sind.

Wir betrachten nun die Vektorlösungen in $Y_{\nu j}(x)$, $\nu = 0, \pm 1, \ldots \pm k!$. Wir wählen darunter eine aus, deren Faktor von x^{ϱ_j} vom höchsten Grade in $\log x$ ist. Den Grad nennen wir $\gamma_{j1} - 1$, und die Lösung schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{Y}_{j1\gamma_{j1}}(x) = x^{\varrho_j} \sum_{\lambda=0}^{\gamma_{j1}-1} \mathfrak{V}_{j1,\gamma_{j1}-\lambda}(x) \frac{(\log x)^{\lambda}}{\lambda!}.$$

Man kann nun sofort $\gamma_{j1} - 1$ andere Lösungen angeben, da die Funktionen

$$(29, 15) \qquad \mathfrak{Y}_{j1\mu}(x) = x^{\varrho_j} \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \mathfrak{V}_{j1,\mu-\lambda}(x) \frac{(\log x)^{\lambda}}{\lambda!}, \quad \mu = 1, \ldots \gamma_{j1}$$

linear ausgedrückt werden können durch $\mathfrak{Y}_{j1\gamma_{j1}}(x)$ und deren analytische Fortsetzung zu den Punkten $x \cdot e^{2\pi i p}$, $p = \pm 1, \pm 2, \ldots$ und folglich unsere Differentialgleichung befriedigen.

Die Sammlung von Vektorlösungen, die zu x^{ϱ_j} gehören und von der wir ausgingen, wird nun reduziert, indem wir γ_{j1} passend gewählte Lösungen durch das System (29, 15) ersetzen und die übrigen mittels dieses reduzieren, so daß die Polynome in $\log x$ von so niedrigem Grad wie möglich werden. Ausgehend von einer Lösung, die danach $\log x$ in so hoher Potenz wie möglich enthält, bilden wir nun ein Lösungssystem analog zu (29, 15):

$$(29, 16) \qquad \mathfrak{Y}_{j2\mu}(x) = x^{\varrho_j} \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \mathfrak{Y}_{j2,\mu-\lambda}(x) \frac{(\log x)^{\lambda}}{\lambda!}, \quad \mu = 1, \ldots \gamma_{j2}.$$

Mit Hilfe der gefundenen zwei Lösungssysteme (29, 15) und (29, 16) wird die Reduktion fortgesetzt, indem noch ein Lösungssystem konstruiert wird, und das wird solange fortgesetzt, bis die Reduktion vollendet ist.

Die gefundenen Vektorlösungen lassen sich zu einer rechteckigen Matrixlösung von einfacher Struktur zusammensetzen. Führt man die Bezeichnungen

$$(29, 17) \qquad V_{j\varkappa}(x) = \begin{pmatrix} \mathfrak{V}_{j\varkappa 1}(x) \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{V}_{j\varkappa\gamma_{j\varkappa}}(x) \end{pmatrix}, \qquad \Theta_{j\varkappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} (= (0) \text{ für } \gamma_{j\varkappa} = 1)$$

ein, so kann man schreiben

$$(29, 18) \qquad Y_{j\varkappa}(x) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Y}_{j\varkappa 1}(x) \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{Y}_{j\varkappa\gamma_{j\varkappa}}(x) \end{pmatrix} = x^{\varrho_j + \Theta_{j\varkappa}} V_{j\varkappa}(x),$$

und setzt man weiterhin

$$(29,19)\qquad \mathsf{P}_j = \varrho_j + \Theta_j,\ \Theta_j = \begin{pmatrix} \Theta_{j1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \Theta_{j\varkappa_j} \end{pmatrix},\quad V_j(x) = \begin{pmatrix} V_{j1}(x) \\ \cdots \\ V_{j\varkappa_j}(x) \end{pmatrix},$$

so hat man

$$(29,20)\qquad Y_j(x) = \begin{pmatrix} Y_{j1}(x) \\ \cdots \\ Y_{j\varkappa_j}(x) \end{pmatrix} = x^{\varrho_j} V_j(x)\,.$$

Es ist klar, daß sämtliche zum Exponenten ϱ_j gehörigen Lösungen sich linear aus den Vektorlösungen in $Y_j(x)$ bilden lassen. Wir müssen aber noch nachweisen, daß diese Lösungen linear unabhängig sind. Nach (29, 8) und (29, 10) ist jede Vektorlösung in $Y_{\nu j}(x)$ von der Form

$$(29,21)\qquad \overline{\mathfrak{Y}}_{\nu j\mu}(x) = x^{\varrho_j}\,\mathfrak{B}_{\nu j\mu}\cdot x^{\overline{\Theta}_j}\,\overline{V}_j(x) = x^{\varrho_j}\sum \frac{(\log x)^\lambda}{\lambda!}\,\mathfrak{B}_{j\mu\nu}\,\overline{\Theta}_j^{\mu}\,\overline{V}_j(x)\,,$$

wobei $\overline{V}_j(x)$ eindeutig in $\mathfrak{A}$ und $\overline{\Theta}_j$ ähnlich wie Θ_j gebaut ist, und hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß der geschilderte Prozeß wirklich zu linear unabhängigen Lösungen führt.

Die m Partikularlösungen $Y_j(x)$ kann man weiter zusammensetzen zu einer Fundamentallösung

$$(29,22)\qquad Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ \cdots \\ Y_m(x) \end{pmatrix},$$

und diese ist genau von der Form (29, 3), wenn wir

$$(29,23)\qquad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{P}_m \end{pmatrix},\quad V(x) = \begin{pmatrix} V_1(x) \\ \cdots \\ V_m(x) \end{pmatrix}$$

setzen, und damit haben wir unser Ziel erreicht.

Im übrigen kann man durch effektivere Ausnutzung der Normalform von $U(x)$ eine bedeutende prinzipielle Reduktion des Darstellungsproblems erreichen.

Da

$$(29,24)\qquad \begin{cases} U(x) = Y^{-1}(x)\,e^{2\pi i\mathsf{P}}\,Y(x) \\ \qquad\ = V^{-1}(x)\,e^{2\pi i\mathsf{P}}\,V(x) \end{cases}$$

ist, kann man, wenn $U(x)$ gegeben ist, durch Lösung von linearen Gleichungen eine in $\mathfrak{A}$ eindeutige Funktion $T(x)$ bestimmen, für die

$$(29,24a)\qquad U(x) = T^{-1}(x)\,e^{2\pi i\mathsf{P}}\,T(x)$$

ist, und transformiert man das Produktintegral $Y(a, x)$ damit, so bekommt man

$$(29,25)\qquad Y(a, x) = T^{-1}(a)\overset{x}{\underset{a}{\prod}}(1 + \Omega(P\,|\,T)\,dt)\,T(x).$$

Da $U(x)$ die Differentialgleichung (28, 7) befriedigt, erkennt man durch Anwendung der Transformationsformel (20, 5), daß $Q = \Omega(P\,|\,T)$ permutabel mit $e^{2\pi i\mathsf{P}}$ ist und folglich auch mit P selbst (vgl. § 7, I).

Wenn nun $\mathsf{P}_1, \ldots \mathsf{P}_m$ in (29, 19) von der Form

$$(29,26)\qquad \mathsf{P}_j = \varrho_j + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind, dann liegt die Situation vor, die in Volterras Satz über permutable Matrizen (§ 3, I) beschrieben ist, und daraus folgt, daß $Q(t_1)$ und $Q(t_2)$ permutabel für beliebige t_1 und t_2 in $\mathfrak{A}$ sind. Aber dieses führt mit sich, daß *die Produktintegration über* $1 + Q(t)\,dt$ *durch Quadratur* (vgl. § 24, 2)) *ausgeführt werden kann*, also

$$Y(a, x) = T^{-1}(a)\, e^{\int_a^x Q(t)dt} \cdot T(x). \tag{29, 27}$$

Das Residuum

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_x^{x'} Q(t)\,dt \tag{29, 28}$$

ist augenscheinlich auch mit P permutabel, also auch mit $Q(t)$ und weiterhin mit $\int_a^x \left(Q(t) - \frac{R}{t}\right) dt$, so daß die Beziehung (8, 3) angewandt werden kann. Damit haben wir

$$Y(a, x) = T^{-1}(a) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^R \cdot V(x), \tag{29, 29}$$

wobei

$$V(x) = e^{\int_a^x \left(Q(t) - \frac{R}{t}\right)dt} \cdot T(x) \tag{29, 30}$$

eindeutig in $\mathfrak{A}$ ist.

Aber selbst wenn dieser günstige Fall nicht eintritt, kann man bedeutende Vorteile durch die Ausführung der Transformation (29, 25) erlangen. Transformiert man nämlich weiterhin mit x^{P} und erinnert sich, daß x^{P} permutabel mit $Q(t)$ ist, so bekommt man

$$\int_a^x (1 + Q\,dt) = a^{-\mathsf{P}} \int_a^x (1 + \Omega(Q \mid t^{\mathsf{P}})\,dt)\, x^{\mathsf{P}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\mathsf{P}} \cdot \int_a^x \left(1 + \left(Q - \frac{\mathsf{P}}{t}\right) dt\right), \tag{29, 31}$$

und hier ist

$$Z(a, x) = \int_a^x \left(1 + \left(Q - \frac{\mathsf{P}}{t}\right) dt\right) \tag{29, 32}$$

eindeutig, da die Windungsfunktion $Z(x, x')$ offenbar $= 1$ ist. Um eine Darstellung von $Z(a, x)$ zu erhalten, aus der die Eindeutigkeit unmittelbar hervorgeht, kann man so vorgehen wie bei der Konstruktion von $Y(x)$. Der Prozeß ist aber dieses Mal wesentlich einfacher, da alle Pole von $Z(x; \varrho)$ einfach sind und in den Punkten $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ liegen; wir haben also nur n linear unabhängige Vektoren aus den Matrizen

$$Z_\nu(x) = x^\nu \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_1^{1'} Z(xt, x)\, t^{\nu-1}\,dt \tag{29, 33}$$

auszuwählen.

Es tritt außerdem noch eine weitere Vereinfachung ein. Da Q permutabel mit P ist, muß es nämlich von der Form

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & Q_m \end{pmatrix} \tag{29, 34}$$

sein, wobei Q_j von gleicher Ordnung wie P_j ist, mit dem es im übrigen auch permutabel ist. $Z(a, x)$ ist also auch eine relative Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente

$$(29,35)\qquad Z_j(a,x)=\int_a^x\left(1+\left(Q_j-\frac{P_j}{t}\right)dt\right)$$

sind, und $Z_\nu(x)$ wird in entsprechender Weise in

$$(29,36)\qquad Z_\nu(x)=\begin{pmatrix} Z_{\nu 1}(x) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & Z_{\nu m}(x)\end{pmatrix}$$

eingeteilt.

§ 30. Die Laurentreihe für $V(x)$.

Bei der Berechnung von $Y(x;\varrho)$ und $Y_\nu(x)$ wird man wohl oft mit Vorteil die im allgemeinen rasch konvergierenden Peanoschen Reihen für $Y(xt,x)$ und $U(x)$ benutzen. Wenn es aber von Interesse ist, die Laurentreihe für $V(x)$ aus der Laurentreihe

$$(30,1)\qquad P(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_\varkappa x^{\varkappa-1}$$

zu bilden [1]), so kann das auf folgende Weise geschehen:

Das Produktintegral

$$(30,2)\qquad Y(x,\lambda x)=\int_1^\lambda(1+xP(xt)\,dt),$$

das für $\lambda=e^{2\pi i}$ in $U(x)$ übergeht, ist eindeutig in $\mathfrak{A}$ und hat also eine summierbare Laurentreihe

$$(30,3)\qquad Y(x,\lambda x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}B_\varkappa(\lambda)\,x^\varkappa,$$

indem z. B.

$$(30,3a)\qquad Y(x,\lambda x)=\lim_{\eta\to 0}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_\varkappa(\lambda)\,x^\varkappa}{\Gamma(\eta|\varkappa|+1)}$$

gleichmäßig in einem beliebigen geschlossenen Bereich $\overline{\mathfrak{A}}$ im Inneren von $\mathfrak{A}$ gilt. Setzt man nun

$$(30,4)\qquad P_\eta(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_\varkappa x^{\varkappa-1}}{\Gamma(\eta|\varkappa|+1)},$$

so wird infolge § 26, I

$$(30,5)\qquad Y_\eta(x,\lambda x)=\int_1^\lambda(1+xP_\eta(xt)\,dt)\simeq Y(x,\lambda x)$$

in $\overline{\mathfrak{A}}$. Da $P_\eta(x)$ keine anderen Singularitäten als 0 und ∞ hat, wird dasselbe für $Y_\eta(x,\lambda x)$ gelten, so daß diese Funktion eine konvergente Laurentreihe

$$(30,6)\qquad Y_\eta(x,\lambda x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}B_\varkappa(\lambda;\eta)\,x^\varkappa$$

hat. Die Koeffizienten hiervon werden dargestellt durch

$$(30,7)\qquad B_\varkappa(\lambda;\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{L}}Y_\eta(\zeta,\lambda\zeta)\,\zeta^{-\varkappa-1}\,d\zeta,$$

wobei $\mathfrak{L}$ eine geschlossene Kurve um 0 ist. Wird sie in $\overline{\mathfrak{A}}$ gelegt, so erkennt man aus (30, 5), daß

$$(30,8)\qquad \lim_{\eta\to 0}B_\varkappa(\lambda;\eta)=B_\varkappa(\lambda)$$

---

[1]) Dieses Problem wurde zum ersten Mal von H. v. Koch [1] gelöst, als eine schöne Anwendung seiner Theorie der unendlichen Determinanten.

ist, und damit sind die Koeffizienten in der summierbaren Reihe (30, 3) selbst dargestellt durch ein gewisses Summierungsverfahren.

Analog hierzu werden die Laurentreihen, die wir im folgenden aufschreiben, summierbar sein und ihre Koeffizienten werden meistens durch ein Summierungsverfahren analog dem für $B_\varkappa(\lambda)$ beschriebenen bestimmt werden. Wenn wir schreiben, daß ein Koeffizient durch eine unendliche Reihe bestimmt ist, meinen wir deshalb nur, daß die Reihe summierbar ist, in dem Sinne, daß der Koeffizient gleich ist dem Grenzwert für $\eta \to 0$ der Reihe, die entsteht, wenn jedes $A_\varkappa$ durch $\dfrac{A_\varkappa}{\Gamma(\eta|\varkappa|+1)}$ ersetzt wird.

Für das μ-te Glied in der Peanoschen Reihe für $Y(x, \lambda x)$ gilt offenbar

$$T_\mu(x;\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_\varkappa^{(\mu)}(\lambda)\, x^\varkappa, \tag{30, 9}$$

wobei die Koeffizienten durch

$$B_\varkappa^{(\mu)}(\lambda) = \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu=\varkappa} i(\lambda;\varkappa_1,\ldots\varkappa_\mu)\, A_{\varkappa_1}\ldots A_{\varkappa_\mu} \tag{30, 10}$$

bestimmt sind und

$$i(\lambda;\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\mu) = \int_1^{\lambda(\mu)} t_1^{\varkappa_1-1}\ldots t_\mu^{\varkappa_\mu-1}\, dt_1\ldots dt_\mu \tag{30, 11}$$

ist. Um diese Integrale zu berechnen, sei bemerkt, daß ein μ-faches Integral als Funktion von λ eine lineare Differentialgleichung μ-ter Ordnung befriedigt, die sich leicht in eine Gleichung mit konstantem Koeffizienten transformieren läßt. Löst man diese nach einer bekannten Methode, die von Cauchy herrührt, so findet man, wie Günther [1], S. 302—303 gezeigt hat, folgenden einfachen Ausdruck

$$i(\lambda;\varkappa_1,\ldots\varkappa_\mu) = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty} \frac{\lambda^\zeta}{\zeta(\zeta-\varkappa_\mu)\ldots(\zeta-\varkappa_\mu-\cdots-\varkappa_1)}. \tag{30, 12}$$

Danach sind die Koeffizienten in (30, 3) durch die konvergente Reihe

$$B_\varkappa(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\varkappa^{(\mu)}(\lambda) \tag{30, 13}$$

bestimmt.

Wird x und λ durch xt und t^{-1} ersetzt, so bekommt man die Laurentreihe

$$Y(xt, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_\varkappa(t) x^\varkappa, \tag{30, 14}$$

deren Koeffizienten durch

$$C_\varkappa(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\varkappa^{(\mu)}(t), \tag{30, 15}$$

$$C_\varkappa^{(\mu)}(t) = \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu=\varkappa} j(t;\varkappa_1\ldots\varkappa_\mu)\, A_{\varkappa_1}\ldots A_{\varkappa_\mu}, \tag{30, 16}$$

$$j(t;\varkappa_1\cdots\varkappa_\mu) = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta(\zeta+\varkappa_1)\ldots(\zeta+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu)} \tag{30, 17}$$

bestimmt sind.

Um nun z. B. $Y_\nu(x)$ zu berechnen — $Y_{\nu i}(x)$ und $Y(x;\varrho)$ kann man ähnlich behandeln — sei bemerkt, daß die Integration in bezug auf t in (29, 9) unter dem Residuumszeichen in (30, 17) ausgeführt werden, kann auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz und Summierbarkeit in bezug auf t von (30, 15) bzw. (30, 16). Wir bekommen dann den folgenden Ausdruck

$$Y_\nu(x) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} x^\varkappa \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\varkappa_1}\ldots A_{\varkappa_\mu}\, \chi(\mathfrak{U}(x)+\nu;\varkappa_1,\cdots\varkappa_\mu)\cdot x^{\mathfrak{U}(x)}, \tag{30, 18}$$

wobei

$$(30,19)\quad \chi(u;\varkappa_1,\dots\varkappa_\mu) = -\operatorname*{Res}_{\zeta=\infty}\frac{e^{2\pi i(u-\zeta)}-1}{2\pi i(u-\zeta)}\cdot\frac{1}{\zeta(\zeta+\varkappa_1)\dots(\zeta+\varkappa_1+\dots+\varkappa_\mu)}.$$

Um zu der gewünschten Darstellung von $Y_\nu(x)$ zu kommen, muß man hier z. B. die dritte kanonische Form für die auftretenden Funktionen von $\mathfrak{U}(x)$ einführen, und dazu braucht man die Laurentreihen für die Funktionen $\mathfrak{U}_{j\mu}(x)$. Um diese zu bestimmen, ist zu bemerken, daß sie durch die Funktionen $U_{j\mu}(x)$ ausgedrückt werden können, die durch

$$(30,20)\qquad (\omega - U(x))^{-1} = \sum\sum\frac{U_{j\mu}(x)}{(\omega-\omega_j)^{\mu+1}}, \quad \omega_j = e^{2\pi i\varrho_j}$$

definiert sind, da die dritte kanonische Form für $(\varrho - \mathfrak{U}(x))^{-1} = 2\pi i \log^{-1}(\omega U^{-1}(x))$ offenbar

$$(30,21)\qquad (\varrho - \mathfrak{U}(x))^{-1} = \sum\sum\frac{U_{j\mu}(x)}{\mu!}\cdot\frac{\partial^\mu(\varrho-\varrho_j)^{-1}}{\partial\omega_j^\mu}$$

ist.

Da wir die Laurentreihe für jedes Glied in der Matrix $\omega - U(x)$ kennen, können wir die Laurentreihe für deren Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung und damit für die komplementäre Matrix $(\omega - U(x))^{-1}\cdot\text{Det.}\,(\omega - U(x))$ bilden. Die Partialbruchzerlegung von $(\omega - U(x))^{-1}$ kann dann vorgenommen werden, wenn

$$(30,22)\qquad \varphi(\omega) = \text{Det.}\,(\omega - U(x))$$

in Faktoren zerlegt ist.

$\varphi(\omega)$, das unabhängig von x ist, kann auf verschiedene Weise gebildet werden. Man kann $U(x)$ in einem beliebigen Punkte in $\mathfrak{A}$ berechnen und dann die Reduktionsdeterminante in diesem Punkt ausrechnen. Man kann auch von der Laurentreihe für $U(x)$ ausgehen, da nämlich $\varphi(\omega)$ das konstante Glied in der Laurentreihe für Det. $(\omega - U(x))$ ist. Eine dritte Methode wurde von Günther [1] skizziert: Da die Eigenwerte von $(U(x))^p$ $\omega_1^p,\dots\omega_n^p$ sind, wird die p-te Potenzsumme der Wurzeln in $\varphi(\omega)=0$ gleich der Spur [1]) von $(U(x))^p$ sein, oder, da sie unabhängig von x ist, gleich der Spur des konstanten Gliedes in der Laurentreihe für $(U(x))^p$. Dies kann nach dem vorhergehenden leicht angegeben werden, weil $U(x)$ eindeutig ist und daraus

$$(30,23)\qquad (U(x))^p = Y(x, xe^{2\pi ip})$$

folgt. Hiernach können die Koeffizienten in dem Polynom $\varphi(\omega)$ rational gebildet werden.

Da wir nun Mittel besitzen, um die Laurentreihen für die eindeutigen Funktionen, die in $Y_\nu(x)$ und $Y_{\nu j}(x)$ eingehen, zu bilden, können wir durch den im letzten Paragraphen geschilderten Prozeß auch die Laurentreihe für $V(x)$ bilden.

§ 31. Unwesentliche Singularitäten. Die kanonische Gleichung.

In dem speziellen Fall, daß $P(x)$ eine isolierte Singularität in einem einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{A}$ hat, kann man Genaueres über die Fundamentallösung erfahren. Liegt die Singularität in $x=0$, so wird die Lösung nach dem vorhergehendem von der Form $x^A V(x)$ sein, wo $V(x)$ eindeutig in $\mathfrak{A}$ ist; weiter ist sie regulär, ausgenommen in dem Punkte 0, wo sie im allgemeinen eine wesentliche Singularität hat. Doch kann es zuweilen vorkommen, daß sie auch in 0 regulär ist, und man sagt dann, daß die Gleichung hier eine *unwesentliche Singularität* [2]) hat.

---

[1]) Unter Spur einer Matrix versteht man die Summe ihrer Diagonalelemente. Diese ist gleich der Summe der nach der Multiplizität aufgezählten Eigenwerte.

[2]) Bieberbach, L.: Theorie der Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin 1926. S. 187.

Trifft dies zu, so zeigt (18, 11) und (8, 6), daß

$$P = D_x Y = \Omega(D_x x^A \mid V^{-1}) = \Omega\left(\frac{A}{x} \mid V^{-1}\right)$$

oder

$$xP = V^{-1} A V + x V^{-1} V' \tag{31, 1}$$

ist, und hieraus erkennt man, daß, wenn $V(0)$ invertierbar ist, die Gleichung *kanonisch*[1]) in $x = 0$ sein wird, d. h. die Koeffizienten haben in diesem Punkte einen einfachen Pol. Ist $V(0)$ nicht invertierbar, so besteht eine lineare Beziehung zwischen ihren Spalten

$$\Sigma v_{ij}(0)\lambda_j = 0, \quad i = 1, \ldots n.$$

k sei so gewählt, daß $\lambda_k \neq 0$ ist, und Λ bezeichne die Matrix, die dadurch entsteht, daß die Elemente in der k-ten Spalte der Einheitsmatrix durch $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ersetzt werden. Dann wird die k-te Spalte in $V(x)\Lambda$ offenbar einen Nullpunkt in 0 haben. Folglich ist

$$V = V_1 x^{E_k} \Lambda^{-1}, \tag{31, 2}$$

wenn wir mit $E_k = (e_{ij}^{(k)})$ die Matrix bezeichnen, in der nur das Element $e_{kk}^{(k)} = 1$ von 0 verschieden ist. Nun ist Det. $\Lambda = \lambda_k \neq 0$, so daß

$$\text{Det. } V_1 = \frac{\lambda_k}{x} \text{ Det. } V \tag{31, 3}$$

in $x = 0$ eine Nullstelle von niedrigerer Ordnung als Det. V hat und eventuell $\neq 0$ ist. Wiederholte Anwendung dieser Schlußfolgerung zeigt, daß man V als $V_1 R$ schreiben kann, wobei R ein Polynom und V_1 invertierbar in 0 ist [2]), so daß $Y_1 = x^A V_1$ eine kanonische Gleichung befriedigt.

Nun sagt man, daß zwei Gleichungen von derselben Art [3]) sind, wenn die eine aus der anderen durch eine Transformation von der Form $Y = Y_1 R$ hervorgeht, wobei R ein Polynom ist. Wir haben damit gezeigt, daß *eine Gleichung mit einer unwesentlichen Singularität in $x = 0$ von derselben Art ist wie eine in diesem Punkte kanonische Gleichung*[4]).

Andererseits: Hat $P(x)$ einen einfachen Pol in 0, so wird für hinreichend kleines x

$$|xP(x)| < cE$$

sein, wobei c ein passend gewählter Skalar ist, und hieraus folgt (vgl. (25, 7))

$$|Y(a, x)| < 1 + (e^{c\int_a^x \left|\frac{dt}{t}\right|} - 1)E.$$

Wenn $x \to 0$, kann also $Y(a, x)$ nicht stärker wachsen als eine Potenz von x, so daß $V(x)$ keine wesentliche Singularität in 0 haben kann. Durch passende Wahl von A ist $V(x)$ also regulär in 0, d. h. *die Gleichung hat hier eine unwesentliche Singularität* [5]).

Um eine Fundamentallösung unter der Form $x^A V(x)$ zu finden, untersuchen wir zuerst die Windungsfunktion. Setzt man

$$P(x) = \frac{A}{x} + F(x), \tag{31, 4}$$

---

[1]) Schlesinger [1], S. 164.

[2]) Vgl. Birkhoff [2], S. 388. Ein etwas umständlicherer Reduktionsprozeß, der im Prinzip von Kronecker [1], S. 385—386 herrührt, gibt ein schärferes Resultat: $V = V_1 x^{\Delta} R$, wo $V_1(0)$ invertierbar, R ein Polynom mit einer konstanten Determinante $\neq 0$ und Δ eine positive ganzzahlige Diagonalmatrix ist (vgl. Schlesinger [1], S. 150—154).

[3]) Schlesinger [1], S. 105.

[4]) Dieser Satz ist aufgestellt von Sauvage [2] und Koenigsberger [1], S. 449, aber zuerst vollständig bewiesen von Horn [2]; einen einfacheren Beweis gab Schlesinger (vgl. Fußnote 3).

[5]) Sauvage [1]. — Dieser Beweis rührt im wesentlichen von Fuhr [2] her. Früher schon gab Birkhoff [1] einen fast ebenso einfachen Beweis.

wobei $F(x)$ regulär in 0 ist, so kann man schreiben

$$U(x) = \int_1^{1'} \left(1 + \left(\frac{A}{t} + xF(xt)\right) dt\right). \tag{31, 5}$$

$U(x)$ ist offenbar auch regulär in 0, und es ist

$$U(0) = e^{2\pi i A}. \tag{31, 6}$$

Nun ist $U(x) \sim U(a)$, wenn weder a noch x singuläre Punkte für die Gleichung sind. Hieraus darf man nicht mit Volterra [2], S. 26 schließen, daß $U(x) \sim U(0)$, aber jedenfalls ist

$$\text{Det.}\,(U(x) - \omega) = \text{Det.}\,(e^{2\pi i A} - \omega), \tag{31, 7}$$

so daß die Eigenwerte $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ von $\mathfrak{U}(x) = \frac{1}{2\pi i} \log U(x)$ sich von den Eigenwerten von A nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Wenn $\Re\varrho$ hinreichend groß ist, kann der Integrationsweg im Ausdruck (29, 4) für $Y(x; \varrho)$ zu den Strecken $(x, 0)$ und $(0, x')$ zusammengezogen werden. In das erste Integral führen wir ein, daß

$$Y(t, x') = Y(t, x)U(x)$$

ist, und im anderen ersetzen wir t durch $t' = t \cdot e^{2\pi i}$, wozu wir bemerken, daß

$$Y(t', x') = Y(t, x)$$

ist. Damit bekommen wir

$$Y(x; \varrho) = \int_0^x t^{\varrho-1} Y(t, x)\, dt. \tag{31, 8}$$

Nun ersetzen wir t durch xt und nehmen im Produktintegral $Y(xt, x)$ eine Ω-Transformation mit t^A vor; das ergibt

$$Y(x; \varrho) = x^\varrho \int_0^1 t^{\varrho-A-1} \int_t^{1} (1 + x\tau^A F(x\tau)\, \tau^{-A}\, d\tau)\, dt. \tag{31, 9}$$

Setzen wir hierin die Peanosche Reihe für das Produktintegral ein, so finden wir folgende Reihenentwicklung

$$\begin{cases} Y(x; \varrho) = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_\mu(x; \varrho), \\ S_\mu(x; \varrho) = x^{\varrho+\mu} \int_0^{1(\mu+1)} t^{\varrho-A-1} \tau_1^A F(x\tau_1)\, \tau_1^{-A}\, \tau_2^A \ldots F(x\tau_\mu)\, \tau_\mu^{-A}\, d\tau_1 \ldots d\tau_\mu\, dt. \end{cases} \tag{31, 10}$$

Die $(\mu + 1)$-fache Integration erstreckt sich über den Bereich

$$0 \leqq t \leqq \tau_1 \leqq \cdots \leqq \tau_\mu \leqq 1 \tag{31, 11}$$

und kann durch $\mu + 1$ iterierte Integrationen über die Intervalle $0 \leqq t \leqq \tau_1$, $0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2$, $\ldots$, $0 \leqq \tau_\mu \leqq 1$ ersetzt werden. Führt man die erste aus und ersetzt danach τ_1 durch $\tau_1 \cdots \tau_\mu$, τ_2 durch $\tau_2 \cdots \tau_\mu$ usw., so bekommt man

$$S_\mu(x; \varrho) = x^{\varrho+\mu}(\varrho - A)^{-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(x\tau_1 \ldots \tau_\mu)\, \tau_1^{\varrho-A} F(x\tau_2 \ldots \tau_\mu)\, \tau_2^{\varrho+1-A} \ldots F(x\tau_\mu)\, \tau_\mu^{\varrho+\mu-1-A}\, d\tau_1 \ldots d\tau_\mu. \tag{31, 12}$$

Wenn man nun das Residuum von $S_\mu(x; \varrho)$ in einem Pol bilden soll, kann man es z. B. in eine Potenzreihe um 0 entwickeln [1]). Ist

---

[1]) Es sei bemerkt, daß $C_\varkappa(\varrho) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\varkappa^{(\mu)}(\varrho)$ im wesentlichen die explizite Lösung der Rekursionsformeln bei Horn [1], S. 395, (5) darstellt.

$$F(x) = \sum_0^\infty A_\varkappa x^\varkappa, \tag{31, 13}$$

so wird

$$S_\mu(x;\varrho) = \sum_{\varkappa=\mu}^\infty C_\varkappa^{(\mu)}(\varrho) x^{\varrho+\varkappa}, \tag{31, 14}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} C_\varkappa^{(\mu)}(\varrho) &= \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu=\varkappa} (\varrho - A)^{-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 A_{\varkappa-1}\, \tau_1^{\varrho+\varkappa_1-1-A} A_{\varkappa_1-1}\, \tau_2^{\varrho+\varkappa_1+\varkappa_2-1-A} \cdots \\ &\qquad A_{\varkappa_\mu-1}\, \tau_\mu^{\varrho+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu-1-A}\, d\tau_1 \ldots d\tau_\mu \\ &= \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu=\varkappa} (\varrho-A)^{-1} A_{\varkappa_1-1} (\varrho+\varkappa_1-A)^{-1} A_{\varkappa_2-1} \ldots A_{\varkappa_\mu-1} (\varrho+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_\mu-A)^{-1}. \end{aligned}\right. \tag{31, 15}$$

Zu einem anderen anwendbaren Ausdruck kommt man durch Deformation jedes der μ Integrationswege zu einer Schleife von 1 um 0; setzt man

$$F_1(x) = F(x)\,(e^{2\pi i(\varrho-A)} - 1)^{-1}, \tag{31, 16}$$

so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} S_\mu(x;\varrho) = x^{\varrho+\mu}(\varrho - A)^{-1} \int_{1,(0),1} \cdots \int_{1,(0),1} & F_1(x\tau_1 \ldots \tau_\mu)\, \tau_1^{\varrho-A} F_1(x\tau_2 \ldots \tau_\mu)\, \tau_2^{\varrho+1-A} \\ & \ldots F_1(x\tau_\mu)\, \tau_\mu^{\varrho+\mu-1-A}\, d\tau_1 \ldots d\tau_\mu. \end{aligned} \tag{31, 17}$$

Hiermit haben wir $S_\mu(x;\varrho)$ für alle x in dem Regularitätsbereich von $F(x)$ in der ganzen ϱ-Ebene analytisch fortgesetzt und können nun die Partikularintegrale $Y_{\nu j}(x)$ bilden.

§ 32. Die normale Gleichung.

Wir nennen eine Gleichung *normal* in $x = 0$, wenn sie eine Fundamentallösung von der Form $x^{\mathsf{P}} \cdot V(x)$ hat, wobei $V(0)$ eine invertierbare und P eine normale Matrix ist, deren Eigenwerte keine ganzzahligen Differenzen $\neq 0$ bilden.

Man erkennt leicht, daß eine Gleichung mit einer unwesentlichen Singularität in 0 von derselben Art wie eine in 0 normale Gleichung ist. Wenn die Eigenwerte von P ganzzahlige Differenzen $\neq 0$ bilden, kann man nämlich diese Matrix in $\mathsf{P}_0 + \Delta$ teilen, wobei die Diagonalelemente in P_0 keine ganzzahligen Differenzen $\neq 0$ bilden und Δ eine positive ganzzahlige Diagonalmatrix ist. Aber da P_0 und Δ permutabel sein müssen, ist

$$x^{\mathsf{P}} = x^{\mathsf{P}_0} \cdot x^{\Delta},$$

und den Faktor x^{Δ} können wir vor der Konstruktion von $R(x)$ in $V(x)$ einziehen.

Ob eine gegebene Gleichung normal ist, erkennt man nach dem folgenden Satze:

I. *Eine kanonische Gleichung ist normal in* 0, *wenn die Eigenwerte vom Residuum A des Koeffizienten keine ganzzahligen Differenzen $\neq 0$ bilden. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Gleichung eine Fundamentallösung von der Form $x^A V(x)$, wobei $V(0) = 1$ ist.*

Daß diese Bedingung notwendig ist, sieht man daraus, daß nach (31, 1)

$$A = \operatorname*{Res}_{x=0} P(x) = V^{-1}(0)\, \mathsf{P}\, V(0) \tag{32, 1}$$

ist. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, betrachten wir das Produktintegral

$$\left\{\begin{aligned} V(x;\xi) &= x^{-A} \int_0^x (1 + t^{A+\xi} F(t)\, t^{-A}\, dt)\; x^A \\ &= \int_0^1 (1 + x^{\xi+1} t^{A+\xi} F(xt)\, t^{-A}\, dt), \end{aligned}\right. \tag{32, 2}$$

wobei ξ einen komplexen Parameter mit hinreichend großer reeller Komponente bezeichnet (vgl. 14, I). Für die Glieder in dessen Peanoscher Reihe

$$V(x;\xi) = \sum_0^\infty T_\mu(x;\xi) \tag{32, 3}$$

gilt infolge (19, 9) die Rekursionsformel

$$T_\mu(x;\xi) = x^{\xi+1} \cdot \int_0^1 t^{A+\xi}\, T_\mu(xt;\xi)\, F(xt)\, t^{-A}\, dt, \quad \mu \geqq 1. \tag{32, 4}$$

Wird

$$T_\mu(x;\xi) = x^{\mu(\xi+1)} G_\mu(x;\xi) \tag{32, 5}$$

und

$$F_\mu(x;\xi) = G_{\mu-1}(x;\xi)\, F(x) \tag{32, 6}$$

gesetzt, so kann man schreiben:

$$G_\mu(x;\xi) = \int_0^1 t^{A+\mu(\xi+1)-1}\, F_\mu(xt;\xi)\, t^{-A}\, dt. \tag{32, 7}$$

Ausgehend von der Potenzreihe

$$F(x) = \sum_0^\infty A_k x^\varkappa = \sum_0^{k-1} A_\varkappa x^\varkappa + x^k R_k(x) \tag{32, 8}$$

suchen wir die entsprechenden Reihen

$$F_\mu(x;\xi) = \sum_0^\infty A_\varkappa^{(\mu)}(\xi) x^\varkappa = \sum_0^{k-1} A_\varkappa^{(\mu)}(\xi)\, x^\varkappa + x^k R_k^{(\mu)}(x;\xi) \tag{32, 9}$$

und

$$G_\mu(x;\xi) = \sum_0^\infty B_\varkappa^{(\mu)}(\xi)\, x^\varkappa = \sum_0^{k-1} B_\varkappa^{(\mu)}(\xi)\, x^\varkappa + x^k S_k^{(\mu)}(x;\xi). \tag{32, 10}$$

Die Koeffizienten werden rekursiv durch die Formeln

$$A_\varkappa^{(\mu)}(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} B_\lambda^{(\mu-1)}(\xi) A_{\varkappa-\lambda} \tag{32, 11}$$

und

$$B_\varkappa^{(\mu)}(\xi) = \int_0^1 t^{A+\mu(\xi+1)+\varkappa-1}\, A_\varkappa^{(\mu)}(\xi)\, t^{-A}\, dt \tag{32, 12}$$

bestimmt. Unter Anwendung der dritten kanonischen Form für t^A kann die zweite dieser Formeln

$$B_\varkappa^{(\mu)}(\xi) = \sum \binom{-\nu-1}{\lambda} \frac{A_{h\lambda}\, A_\varkappa^{(\mu)}(\xi)\, A_{j\nu}}{(\varrho_h - \varrho_j + \varkappa + \mu(\xi+1))^{\lambda+\nu+1}} \tag{32, 13}$$

geschrieben werden, wobei die Summation sich über alle vorkommenden Werte von h, j, ν und λ erstreckt. Die Koeffizienten sind also rationale Funktionen von ξ mit Polen in

$$\xi = \frac{\varrho_h - \varrho_j - \varkappa}{\mu} - 1, \quad h, j = 1, \ldots m; \quad \varkappa = 0, 1, \ldots; \quad \mu = 1, 2, \ldots . \tag{32, 14}$$

Weiterhin ist das Integral

$$S_k^{(\mu)}(x;\xi) = \int_0^1 t^{A+\mu(\xi+1)+k-1} R_k^{(\mu)}(xt;\xi)\, t^{-A}\, dt \tag{32, 15}$$

konvergent für

$$\Re\xi > -\frac{\bar{\varrho}+k}{\mu} - 1, \quad \bar{\varrho} = \operatorname*{Max}_{(h,j)} \Re(\varrho_h - \varrho_j)\,, \tag{32, 16}$$

und hieraus schließt man durch Induktion, daß die Funktionen $F_\mu(x;\xi)$ und $G_\mu(x;\xi)$ meromorphe Funktionen von ξ mit den Polen (32, 14) sind, falls x im Inneren des prinzipalen Mittag-Lefflerschen Sternes $\mathfrak{S}$ von $F(x)$ liegt.

Nach der Annahme, die wir über die Eigenwerte von A gemacht haben, kann der Punkt $\xi = 0$ nicht unter diesen Polen vorkommen, und er kann auch kein Häufungspunkt für diese sein. Folglich sind sämtliche Glieder in der Peanoschen Reihe (32, 3) in einer gewissen Umgebung von $\xi = 0$ regulär. Weiterhin werden wir zeigen, daß die Reihe dort gleichmäßig konvergent ist, so daß auch $V(x;\xi)$ in $\xi = 0$ regulär ist, wenn x im Innern von $\mathfrak{S}$ liegt und $\arg x$ beschränkt ist.

Aus der Halbebene $\Re\xi \geqq -1 + \eta > -1$ werden eventuelle Pole (32, 14) herausgeschnitten, und die ganze Zahl q wird $> \frac{1}{\eta}(\bar{\varrho} + 2\varepsilon)$, gewählt, wo ε eine positive Zahl ist, die wir gleich besprechen werden. Wir wollen nun zwei Folgen von positiven skalaren Funktionen $(f_\mu(x;\xi))$ und $(g_\mu(x;\xi))$ konstruieren, die für $\mu \geqq q$ die Ungleichungen

$$|F_\mu(x;\xi)| \leqq f_\mu(x;\xi)E, \quad |G_\mu(x;\xi)| \leqq g_\mu(x;\xi)E \tag{32, 17}$$

befriedigen, wenn x in einem geschlossenen Bereich in $\mathfrak{S}$ und ξ in einem geschlossenen Bereich in der präparierten Halbebene liegt. Aus $E^2 = E$ und (32, 6) folgt, daß wir

$$f_\mu(x;\xi) = g_{\mu-1}(x;\xi)f(x) \tag{32, 18}$$

setzen können, indem

$$|F(x)| \leqq f(x)E. \tag{32, 19}$$

Aus der dritten kanonischen Form für t^A erkennt man, daß, wenn ϱ' und ϱ'' die Eigenwerte von A mit dem kleinsten bzw. größten reellen Teil sind, man zu einer beliebigen positiven Zahl ε einen konstanten Skalar α wählen kann, für den

$$|t^A| \leqq \sqrt{\alpha}\, t^{\Re\varrho' - \varepsilon}E, \quad |t^{-A}| \leqq \sqrt{\alpha}\, t^{-\Re\varrho'' - \varepsilon}E$$

ist, mit $0 < t < 1$. Mit dem gewählten q ist weiterhin

$$t^{q(\Re\xi+1)-\bar{\varrho}-2\varepsilon} < 1\,.$$

Daraus folgt, daß wir für $\mu \geqq 1$

$$g_{q+\mu}(x;\xi) = \alpha \int_0^1 t^{\mu(\xi_1+1)-1} f_{q+\mu}(xt;\xi)\, dt \tag{32, 20}$$

wählen können, indem wir der Kürze halber $\Re\xi = \xi_1$ setzen. Durch Induktion ist leicht zu zeigen, daß dies

$$g_{q+\mu}(x;\xi) = \alpha \int_0^1 \frac{\left(\alpha \int_t^1 \tau^{\xi_1} f(x\tau)\, d\tau\right)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \cdot t^{\xi_1} f(xt)\, g_q(xt;\xi)\, dt \tag{32, 21}$$

ergibt. Da $F(x)$ und $G_q(x;\xi)$ in den betrachteten Bereichen in der x- und ξ-Ebene regulär sind, können $f(x)$ und $g_q(x;\xi)$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden, und damit erhalten wir eine gleichmäßig konvergierende Majorantenreihe für die Peanosche Reihe (32, 3).

Für

$$Y(x;\xi) = x^A V(x;\xi) \tag{32, 22}$$

gilt infolge (32, 2) und (18, 11) die Relation

$$(32,23)\quad \begin{cases} D_x Y(x;\xi) = \Omega(D_x(x^A V(x)\, x^{-A}) \mid x^{-A}) = \Omega(x^{A+\xi} F(x)\, x^{-A} \mid x^{-A}) \\ \qquad\qquad = \dfrac{A}{x} + x^{\xi} F(x). \end{cases}$$

Da $V(x;\xi)$ für die angegebenen x in $\xi = 0$ regulär ist, wird

$$(32,24)\qquad Y(x) = Y(x;0) = x^A\, V(x)$$

die Gleichung

$$(32,25)\qquad Y'(x) = Y(x)\, P(x)$$

befriedigen. In der Umgebung des Punktes $x = 0$ wird die Reihe

$$(32,26)\qquad V(x) = \sum_0^\infty T_\mu(x;0)$$

gleichmäßig konvergieren, so daß $V(x)$ in 0 regulär ist und

$$(32,27)\qquad V(0) = 1.$$

Damit ist der Satz I bewiesen [1]).

Wir sind hiernach imstande, eine gegebene kanonische Gleichung, deren Koeffizient das Residuum A hat, in eine normale Gleichung zu transformieren. Zuerst wird eine invertierbare Matrix A gesucht, die A in seine Normalform P transformiert; wird Y durch $Y\mathsf{A}$ ersetzt, nimmt die Gleichung die Form

$$(32,28)\qquad Y' = Y\left(\frac{\mathsf{P}}{x} + F\right) = Y P_1$$

an, wo $F(x)$ regulär in 0 ist. Weicht nun einer der Eigenwerte von A, z. B. ϱ_1 von einem anderen um eine ganze positive Zahl ab, so teilen wir P in eine Relativmatrix

$$(32,29)\qquad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\mathsf{P}}_1 \end{pmatrix}$$

ein, wo $\mathsf{P}_1 = \varrho_1 + \Theta_1$ und die Eigenwerte von $\overline{\mathsf{P}}_1$ $\varrho_2, \ldots \varrho_m$ sämtlich $\neq \varrho_1$ sind. Wird die Gleichung mit der Relativmatrix

$$(32,30)\qquad X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert, wobei x ein Skalar von gleicher Ordnung wie P_1 ist, bekommt man eine Gleichung mit dem Koeffizienten

$$(32,31)\qquad P_2 = \Omega(P_1 | X) = \Omega\left(\frac{\mathsf{P}}{x}\,\middle|\, X\right) + XFX^{-1}.$$

Wird F auf gleiche Weise wie P in

$$(32,32)\qquad F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

---

[1]) Im übrigen sei bemerkt, daß der Beweis sich leicht so modifizieren läßt, daß die Regularität von $F(x)$ in 0 dadurch ersetzt wird, daß $F(x)$ für $x \to 0$ längs eines gegebenen Radiusvektors oder in einem gegebenen Winkelraum asymptotisch durch eine Potenzreihe

$$F(x) \sim \sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa x^{\varkappa+\delta-1}, \quad \delta > 0$$

dargestellt werden kann. Man findet dann $V(x) \to 1$ für $x \to 0$ und allgemein

$$V(x) = \sum_0^{m-1} T_\mu(x;0) + O(x^{m\delta}).$$

eingeteilt, so wird

$$XFX^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11} & xF_{12} \\ \frac{1}{x}F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{32, 33}$$

und da X permutabel mit P ist, erhält man

$$\Omega\left(\frac{\mathsf{P}}{x}\,\middle|\, X\right) = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 - 1 & 0 \\ 0 & \bar{\mathsf{P}}_1 \end{pmatrix}. \tag{32, 34}$$

Die neue Gleichung ist also auch kanonisch und das Residuum von P_2

$$= \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 - 1 & 0 \\ F_{21}(0) & \bar{\mathsf{P}}_1 \end{pmatrix} \tag{32, 35}$$

hat die Eigenwerte $\varrho_1 - 1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$. Wenn sie keine ganzzahligen Differenzen haben, dann ist die Gleichung normal, und sonst behandelt man sie genau wie die ursprüngliche. Man sieht, daß man mit einer endlichen Anzahl von Transformationen zu einer normalen Gleichung kommen kann.

Wir haben oben (§ 31) bemerkt, daß $U(x)$ zuweilen nicht mit $U(0)$ äquivalent ist. Dieser Fall kann nicht eintreten, wenn die Gleichung normal ist. Dann ist nämlich

$$U(x) = V^{-1}(x)\, e^{2\pi i A} V(x) \sim e^{2\pi i A}, \tag{32, 36}$$

wo A das Residuum des Koeffizienten und $V(0) = 1$ ist. Wenn sie nicht normal ist, hat sie eine Fundamentallösung von der Form

$$Y(x) = x^{\bar{A}}\, V(x)\, R(x), \tag{32, 37}$$

wobei $R(x)$ ein Polynom ist, $V(0) = 1$ und $\bar{A}$ das Residuum des Koeffizienten in einer normalen Gleichung von derselben Art wie der gegebenen bezeichnet. Folglich ist

$$U(x) = R^{-1}(x) V^{-1}(x)\, e^{2\pi i \bar{A}}\, V(x)\, R(x) \sim e^{2\pi i \bar{A}}, \tag{32, 38}$$

während

$$U(0) = e^{2\pi i A}, \tag{32, 39}$$

und obgleich $e^{2\pi i A}$ und $e^{2\pi i \bar{A}}$ dieselben Eigenwerte haben, brauchen sie keineswegs äquivalent zu sein. Wenn man den regulären Teil $F(x)$ des Koeffizienten nicht mit in die Diskussion beziehen will, läßt sich nur folgendes behaupten: Die Normalform von A,

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{P}_m \end{pmatrix} \tag{32, 40}$$

sei so geschrieben, daß 1. die P_j je nur einen Eigenwert ϱ_j haben, 2. $\varrho_j \neq \varrho_k$ für $j \neq k$ ist, und 3. in der Anordnung $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_m$ diejenigen P_j unmittelbar aufeinander folgen, deren Eigenwerte ganzzahlige Differenzen besitzen, und zwar nach der Größe der Realteile der Eigenwerte geordnet. Dann wird die Normalform von $\bar{A}$ von der Form

$$\bar{\mathsf{P}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathsf{P}}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \bar{\mathsf{P}}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Gamma_{m-1} & \bar{\mathsf{P}}_m \end{pmatrix} \tag{32, 41}$$

sein, wobei $\mathsf{P}_j - \bar{\mathsf{P}}_j$ ein ganzer Skalar $\geqq 0$ ist und alle Elemente in Γ_j gleich 0 sind, ausgenommen dem in der oberen rechten Ecke, das gleich 1 sein kann, wenn $\bar{\varrho}_j = \bar{\varrho}_{j+1}$ ist.

In der Theorie über skalare Gleichungen von n-ter Ordnung behandeln Fuchs [1] und Frobenius [1] die Frage, wieweit „erwartete" Logarithmenpotenzen in den Lösungen wirklich auftreten und speziell, ob Logarithmen ganz fortfallen. Von unserer Seite gesehen liegt der Grund zum Entstehen dieser Frage darin, daß die Gleichung auf Matrixform gebracht wohl kanonisch, aber im allgemeinen nicht normal ist, indem die Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung, die unserer charakteristischen Gleichung

$$\text{Det.}\,(A - \varrho) = 0$$

entspricht, ganzzahlige Differenzen haben können. Die aufgestellte Bedingung für die Verteilung der Logarithmenpotenzen gibt in Wirklichkeit eine Transformation an, die die kanonische Gleichung in eine normale überführt.

Literatur.

Baker, H. F. [1]: On the integration of linear differential equations. Proc. Lond. Math. Soc. 35 (1903), S. 333—378.

Birkhoff, G. D. [1]: A simplified treatment of the regular singular point. Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1910), S. 199—202.

Birkhoff, G. D. [2]: Infinite products of analytic matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), S. 386—404.

Bromwich, T. J. I'A. [1]: Theorems on matrices and bilinear forms. Proc. Cambr. Phil. Soc. 11 (1901), S. 75—89.

Frobenius, G. [1]: Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen. Journ. für Math. 76 (1873), S. 214—235.

Frobenius, G. [2]: Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Berlin 1896, S. 7—16.

Frobenius, G. [3]: Über vertauschbare Matrizen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Berlin 1896, S. 601—604.

Fuchs, L. [1]: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. I—II. Journ. für Math. 66 (1866), S. 121—160; 68 (1868), S. 354—385.

Fuhr, H. [1]: Abschätzungsformeln aus dem Gebiet der linearen Differentialsysteme erster Ordnung. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 28 (1919), S. 167—172.

Fuhr, H. [2]: Bemerkung über die Stellen der Bestimmtheit eines linearen Differentialsystems. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 31 (1922), S. 203—205.

Günther, P. [1]: Über die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journ. für Math. 107 (1891), S. 298—318.

Horn, J. [1, 2]: Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. I, II. Math. Ann. 39 (1891), S. 391—408; 40 (1892), S. 527—550.

Horn, J. [3]: Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen. Journ. für Math. 138 (1913), S. 159—191.

Jacobi, C. G. J. [1]: Gesammelte Werke IV, Berlin 1886, S. 405.

Koenigsberger, L. [1]: Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Leipzig 1889. Kap. 3 und 6.

von Koch, H. [1]: Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta Math. 16 (1892/93), S. 217—295.

Kronecker, L. [1]: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten I. Bearbeitet und fortgeführt von K. Hensel. Leipzig 1903. 20. und 21. Vorl.

Lappo-Danilewski, J. A. [1]: La généralisation de la formule de Jacobi, concernant le déterminant des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires. Comptes Rendus, Paris 189 (1929), S. 557.

Loewy, A. [1]: Über Matrizen- und Differentialkomplexe I, II, III. Math. Ann. 78 (1918), S. 1—51, 343—368.

von Neumann, J. [1]: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 3—42.

Peano, G. [1]: Intégration par séries des équations différentielles. Math. Ann. 32 (1888), S. 450—456.

Perron, O. [1]: Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist. II. Journ. für Math. 143 (1913), S. 25—50.

Perron, O. [2]: Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei großen Werten der unabhängigen Variablen. Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 27—43.

Phillips, H. B. [1]: Functions of matrices. Amer. Journ. Math. 41 (1919), S. 226—278.

Rasch, G. [1]: Om Matrixregning og dens Anvendelse paa Differens-og Differentialligninger. 115 S. København 1930.
Sauvage, L. [1, 2]: Sur les solutions regulières d'un système d'équations différentielles. I, III. Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), S. 391—404; (3) 6 (1889), S. 157—182.
Schlesinger, L. [1]: Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. Leipzig u. Berlin 1908.
Schlesinger, L. [2]: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. 3. Aufl. Berlin u. Leipzig 1922.
Schlesinger, L. [3]: Neue Grundlage für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen. Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 33—61.
Schlesinger, L. [4]: Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkül der Matrizen. Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 485–501.
Volterra, V. [1, 2]: Sui fundamenta della teoria delle equazioni differenziali lineari. I, II. Mem. Soc. Ital. Sc. (3) 6 (1887), no. 8, 107 S.; (3) 12 (1902), S. 3—68.
Volterra, V. [3]: Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. Rend. Circ. Mat. Palermo 2 (1888), S. 69—75.
van der Waerden, B. L. [1]: Moderne Algebra II. Kap. XV. Berlin 1931.
Weierstrass, K. [1]: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin 1868, S. 310—338.

Eingegangen 17. Dezember 1932.

Ein „belastetes“ Variationsproblem.

Von *H. Boerner* in München.

Wenn man kompliziertere Variationsprobleme behandelt, z. B. das Lagrangesche Problem, dann fügt man bisweilen zum Integral noch eine Funktion der — auf irgendwelchen Mannigfaltigkeiten beweglichen — Endpunkte hinzu [1]); man erhält dann ein Zusatzglied in den Randbedingungen, dessen Mitnahme die Durchführung der Aufgabe nicht weiter erschwert. Interessanter werden die Verhältnisse, wenn man eine solche „Last“ irgendwo im Innern anbringt, was soweit ich sehe bisher noch nicht geschehen ist. Im folgenden soll kurz das allereinfachste Variationsproblem in dieser Weise behandelt werden und zwar, weil es sich dabei um eine „Ecke“ handeln wird, in Parameterdarstellung. Die Anregung zu einer Problemstellung dieser Art verdanke ich Herrn Professor Lichtenstein †. Die Übertragung auf Doppelintegrale dürfte nicht schwer sein; es handelt sich dann um das Extrem der Summe eines Doppel- und eines einfachen Integrals, ein Problem, das Hilbert einmal behandelt hat [2]), aber wiederum nur für den Fall, daß das einfache Integral über einen Teil des Randes erstreckt wird.

1. Es sei T ein einfach zusammenhängendes Gebiet der x, y-Ebene, L ein stetig gekrümmter Querschnitt, der T in zwei Teilgebiete T_1 und T_2 zerlegt. Ist t die von irgendeinem Anfangspunkt aus gezählte Bogenlänge auf L, so seien $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ die Gleichungen von L; ξ und η sind mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig; wir setzen noch $\xi'(t) = \cos\tau$, $\eta'(t) = \sin\tau$; die positive Richtung soll so gewählt sein, daß T_1 zur Linken, T_2 zur Rechten liegt. Ferner sei auf L eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\Phi(t)$ gegeben.

Die Funktion $F(x, y; x', y')$ ist in T und für alle x', y' definiert und genügt den üblichen Differenzierbarkeits- und Homogeneitätsbedingungen [3]). Es ist

$$x' F_{x'} + y' F_{x'} = F \tag{1.1}$$

und

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{y'x'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1(x, y; x', y'); \tag{1.2}$$

die E-Funktion ist durch

$$\begin{aligned} E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = {} & \{F_{x'}(x, y; \bar{x}', \bar{y}') - F_{x'}(x, y; x', y')\}\,\bar{x}' \\ & + \{F_{y'}(x, y; \bar{x}', \bar{y}') - F_{y'}(x, y; x', y')\}\,\bar{y}' \end{aligned} \tag{1.3}$$

definiert.

Das Variationsproblem lautet so: Unter allen Kurven $C : x = x(s)$, $y = y(s)$ (s irgendein Parameter) mit abteilungsweise stetiger Tangente, die einen festen Punkt P_1

---

[1]) Z. B. O. Bolza, Math. Ann. **74** (1913), p. 430; M. Morse, Am. Journ. of Math. **53** (1931), p. 517.

[2]) Math. Ann. **62** (1906), p. 365.

[3]) Vgl. z. B. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, p. 193ff.

in T_1 mit einem festen Punkt P_2 in T_2 verbinden und den Querschnitt L nur einmal treffen und nicht berühren, diejenige zu finden, die der Summe

$$J_C = \int_{s_1}^{s_2} F(x, y, x', y')\, ds + \Phi(t) \tag{1.4}$$

den kleinsten Wert erteilt. Hierbei ist t der Parameterwert auf L, der zum Treffpunkt gehört.

Wie üblich, betrachten wir eine Kurve C und stellen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß sie die Lösung liefert. Der Parameter s soll die Bogenlänge bedeuten und läuft von s_1 bis s_2; wir setzen $x'(s) = \cos\vartheta$, $y'(s) = \sin\vartheta$. Der Treffpunkt mit L sei P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0 und den Parameterwerten s_0 auf C und t_0 auf L. Da C im allgemeinen im Punkt P_0 eine Ecke haben wird, führen wir für die beiden Teilbögen von P_1 bis P_0 und von P_0 bis P_2 die Bezeichnungen C_{10} bzw. C_{02} ein und nennen die Winkel, die ihre Tangenten in P_0 mit der x-Achse einschließen, ϑ_0 bzw. $\bar{\vartheta}_0$; τ_0 ist der Winkel zwischen der x-Achse und der Tangente von L in P_0.

Betrachtet man zunächst Vergleichskurven, die L ebenfalls in P_0 treffen, so erhält man zwei gewöhnliche Variationsprobleme mit den festen Endpunkten P_1, P_0 bzw. P_0, P_2; die Bögen C_{10} und C_{02} müssen also der zu $F(x, y; x', y')$ gehörigen Eulerschen Differentialgleichung genügen, und wir nehmen an, daß die bekannten Bedingungen von Legendre, Jacobi und Weierstraß in der folgenden Weise erfüllt sind:

(1.5) es ist $F_1 > 0$ im ganzen Intervall $\langle s_1, s_2\rangle$;

(1.6) dieses abgeschlossene Intervall enthält keinen zu P_0 konjugierten Punkt;

(1.7) die E-Funktion, gebildet für die Richtung ϑ und irgendeine andere Richtung, soll nie negativ sein und höchstens im Punkt P_0 außerordentlich verschwinden;

(1.7) wird nur verlangt, wenn es sich um starkes Minimum handelt. Ferner soll die Extremale C außer in P_0 keine Ecke besitzen, eine Voraussetzung, die ohnehin üblich ist, wenn man von schwachem Minimum redet; im Falle des starken folgt sie schon aus (1.7).

Für die Funktionswerte im Punkte P_0 führen wir noch die abkürzende Bezeichnung $F(x_0, y_0; \cos\vartheta, \sin\vartheta) = F(\vartheta)$ ein; entsprechend für die partiellen Ableitungen von F und für F_1; die E-Funktion heiße

$$E(\vartheta, \bar{\vartheta}) = E(x_0, y_0; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}). \tag{1.8}$$

Betrachtet man jetzt beliebige Vergleichskurven, so handelt es sich um die Summe von zwei Integralen mit gemeinsamem auf L beweglichen Endpunkt, vermehrt um Φ. Wir werden darum den Parameter so wählen, daß er ebenfalls von s_1 bis s_2 läuft und daß der Wert s_0 zum Treffpunkt gehört. Jede Vergleichskurve, deren Treffpunkt von P_0 verschieden ist, kann als Mitglied einer Kurvenschar

$$x = \varphi(s, t), \quad y = \psi(s, t) \tag{1.9}$$

dargestellt werden, so daß

$$\begin{aligned} \varphi(s, t_0) &= x(s), & \psi(s, t_0) &= y(s) \\ \varphi(s_0, t) &= \xi(t), & \psi(s_0, t) &= \eta(t)\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Für $s = s_0$ ist also (die Indizes bezeichnen die partiellen Ableitungen)

$$\varphi_t = \cos\tau, \quad \psi_t = \sin\tau\,.$$

Die Eckenbedingung erhält man, indem man die erste Variation bildet, d. h. die Summe J, als Funktion von t betrachtet, differenziert, $t = t_0$ setzt und die Tatsache benützt, daß die Kurve C aus Extremalenbögen besteht, und sodann die erste Variation gleich Null setzt. Man erhält ohne weiteres

$$(1.11)\quad \{F_{x'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{x'}(\vartheta_0)\}\cos\tau_0 + \{F_{y'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{y'}(\vartheta_0)\}\sin\tau_0 = \Phi'(t_0)\,.$$

2. Um die Gleichung (1.11) zu diskutieren, bezeichnen wir mit A irgendeine Zahl und betrachten die Gleichung

$$(2.1)\qquad \{F_{x'}(\bar{\alpha}) - F_{x'}(\alpha)\}\cos\tau_0 + \{F_{y'}(\bar{\alpha}) - F_{y'}(\alpha)\}\sin\tau_0 = A$$

für irgendwelche Winkel $\alpha, \bar{\alpha}$, die zwischen τ_0 und $\tau_0 - \pi$ liegen. Für die partielle Ableitung der linken Seite von (2.1) nach α erhält man mit Berücksichtigung von (1.2) den Ausdruck

$$-F_1(\alpha)\sin(\tau_0 - \alpha)\,,$$

entsprechend

$$+F_1(\bar{\alpha})\sin(\tau_0 - \bar{\alpha})$$

für die Ableitung nach $\bar{\alpha}$. Erteilt man also dem Winkel α einen festen Wert, für den $F_1(\alpha) > 0$ ist, und beschränkt den Winkel $\bar{\alpha}$ auf diejenigen Intervalle, in denen $F_1(\bar{\alpha}) > 0$ gilt, so wird in jedem dieser Intervalle die linke Seite von (2.1) monoton mit $\bar{\alpha}$ wachsen. Ist A eine geeignete dem Wertebereich der linken Seite von (2.1) angehörige Zahl, so gibt es eine Anzahl Lösungen $\bar{\alpha}$ von (2.1), darunter, wenn nur $|A|$ genügend klein ist, gewiß eine ausgezeichnete, bei der $\bar{\alpha}$ in demselben Intervall liegt wie α. Variiert man A, so ändert sich $\bar{\alpha}$ im gleichen Sinn; wird dabei $A = 0$, so ergibt die ausgezeichnete Lösung $\bar{\alpha} = \alpha$, also eine kontinuierliche Extremale des gewöhnlichen Variationsproblems. Aus den andern Lösungen wird dagegen im allgemeinen keine geknickte Extremale des gewöhnlichen Problems; denn die Erdmannschen Bedingungen

$$(2.2)\qquad F_{x'}(\bar{\alpha}) = F_{x'}(\alpha),\quad F_{y'}(\bar{\alpha}) = F_{y'}(\alpha)$$

verlangen ja viel mehr als (2.1) mit $A = 0$, und daher kommt es, daß die Lösungen dieser Gleichungen stets isoliert liegen, während man aus jeder Lösung von (2.1) durch variieren von α beliebig viele neue erhalten kann. Es gilt aber der Satz:

Ist für die Winkel $\alpha, \bar{\alpha}$ die Gleichung (2.1) *mit $A = 0$ erfüllt und sind die durch α und $\bar{\alpha}$ in T_1 bzw. T_2 bestimmten Extremalenstücke in der Umgebung von P_0 stark, so gilt* (2.2).

Zum Beweis betrachten wir den Ausdruck

$$\psi(\beta) = \{F_{x'}(\bar{\alpha}) - F_{x'}(\alpha)\}\cos\beta + \{F_{x'}(\bar{\alpha}) - F_{x'}(\alpha)\}\sin\beta$$

für alle Richtungen β. $\psi(\beta)$ verschwindet nach Voraussetzung für $\beta = \tau_0$ und $\beta = \tau_0 - \pi$ und ist, falls (2.2) nicht erfüllt ist, im Intervall $\tau_0 - \pi < \beta < \tau_0$ entweder immer positiv oder immer negativ, die Zahlen $\psi(\alpha)$ und $\psi(\bar{\alpha})$ sind also beide positiv oder beide negativ. Nach (1.3) ist aber mit der Schreibweise (1.8)

$$\psi(\bar{\alpha}) = E(\alpha, \bar{\alpha})\,,\qquad \psi(\alpha) = -E(\bar{\alpha}, \alpha)\,.$$

Wir haben jedoch

$$E(\alpha, \bar{\alpha}) \geqq 0,\qquad E(\bar{\alpha}, \alpha) \geqq 0$$

vorausgesetzt, also muß $\psi(\alpha) = \psi(\bar{\alpha}) = 0$ sein, woraus (2.2) folgt.

Ist insbesondere P_0 ein regulärer Punkt [1]) des gewöhnlichen Variationsproblems, also $F_1 > 0$ für alle Richtungen, dann folgt aus (2.1) mit $A = 0$ stets nicht nur (2.2), sondern sogar $\bar{\alpha} = \alpha$.

3. Um die Weierstraßsche hinreichende Bedingung abzuleiten, braucht man ein Feld von geknickten Extremalen. Wegen (1.6) kann man ein Feld von kontinuierlichen Extremalen konstruieren, das in T_1 durch die Gleichungen (1.9) gegeben ist, den Be-

[1]) Nach der Definition von Hilbert, s. z. B. Bolza, Vorlesungen p. 214.

ziehungen (1.10) genügt und den Punkt P_1 sowie ein Stück der Kurve L in der Umgebung von P_0 im Innern enthält. Das Feld ordnet jedem Punkt des von ihm bedeckten Gebietes ein Gefälle zu, das wir mit $\vartheta(s, t)$ bezeichnen können. Die Gleichung

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad &\{F_{x'}(x, y; \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}) - F_{x'}(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\}\cos\tau \\ &+ \{F_{y'}(x, y; \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}) - F_{y'}(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\}\sin\tau = \Phi'(t)\,^{1}),\end{aligned}$$

in der $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $\vartheta = \vartheta(s_0, t)$ zu setzen ist, wird für $t = t_0$ durch den Winkel $\bar{\vartheta}_0$ befriedigt, und in diesem Punkt ist, wie wir am Anfang des vorigen Abschnitts sahen, die Ableitung nach $\bar{\vartheta}$ von Null verschieden. Also kann man nach $\bar{\vartheta}$ auflösen und in den so erhaltenen Richtungen, die wir mit $\bar{\vartheta}(s_0, t)$ bezeichnen, von den Punkten von L aus ins Gebiet T_2 hinein Extremalenstücke konstruieren, die unser geknicktes Extremalenfeld (1.9), (1.10) vervollständigen. Wir beschränken dabei t auf eine so kleine Umgebung von t_0, daß im ganzen Feld die Legendresche Bedingung (1.5) erfüllt bleibt. Nehmen wir noch an, daß die Jacobische Bedingung für das „belastete" Problem, die wir im nächsten Abschnitt ableiten werden, erfüllt ist, so ist es möglich, das Feld so anzulegen, daß es auch die Kurve C_{02}, also die ganze Extremale C im Innern enthält.

Ist in diesem Felde überall

$$E(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta; \cos\tilde{\vartheta}, \sin\tilde{\vartheta}) > 0\,,$$

wenn man $\vartheta = \vartheta(s, t)$ und für $\tilde{\vartheta}$ irgendeine Richtung $\neq \vartheta$ wählt, so liefert die Extremale C ein starkes Minimum.

Zum Beweis betrachten wir irgendeine Kurve $\tilde{C}: x = \tilde{x}(\sigma)$, $y = \tilde{y}(\sigma)$ mit abteilungsweise stetiger Tangente, die P_1 mit P_2 verbindet, ganz im Felde verläuft und die Kurve L im Punkt P_3 mit dem Parameterwert $\tilde{t}$ trifft. Das „Hilbert-Integral"

$$\int_{\tilde{C}} \{F_{x'}(\tilde{x}, \tilde{y}; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\tilde{x}' + F_{y'}(\tilde{x}, \tilde{y}; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\tilde{y}'\}\,d\sigma$$

(ϑ ist das Gefälle des Feldes im Punkt $\tilde{x}, \tilde{y}$), das sich für $\tilde{C} = C$ auf die Größe $J_C - \Phi(t_0)$ reduziert, ist nur in jedem der beiden Teilfelder links und rechts von L vom Wege unabhängig. Aber der Integrationsweg darf jeweils auch Teile von L enthalten. Integriert man nun über L vom $\tilde{t}$ bis t_0 mit den Grenzwerten des Gefälles von der Seite T_1 und dann zurück von t_0 nach $\tilde{t}$ mit den überstrichenen Werten, so erhält man wegen (3.1) einfach

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi'(t)\,dt = \Phi(\tilde{t}) - \Phi(t_0)\,.$$

Daraus folgt, daß die Summe

$$\int_{\tilde{C}} \{F_{x'}(\tilde{x}, \tilde{y}; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\tilde{x}' + F_{y'}(\tilde{x}, \tilde{y}; \cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\tilde{y}'\}\,d\sigma + \Phi(\tilde{t})\,,$$

die für $\tilde{C} = C$ in J_C übergeht, überall vom Weg unabhängig ist. Diese Summe ist also gleich J_C, wenn $\tilde{C}$ die Punkte P_1 und P_2 verbindet. Subtrahiert man sie von $J_{\tilde{C}}$, so fällt Φ ganz weg und man erhält unmittelbar wegen (1.1) und (1.3) und unter Benutzung der Homogeneitätseigenschaft der ersten Ableitungen von F die Weierstraßsche Formel für unser Problem:

$$J_{\tilde{C}} - J_C = \int_{\tilde{C}} E(\tilde{x}, \tilde{y}; \cos\vartheta; \sin\vartheta; \tilde{x}', \tilde{y}')\,d\sigma\,,$$

aus der wegen (1. 7) die zu beweisende Behauptung unmittelbar folgt.

---

[1]) Wir können $\cos\vartheta$ schreiben statt $\varphi_s(s_0, t)$ usw., weil die Ableitungen $F_{x'}$ und $F_{y'}$ in diesen Argumenten homogen vom Grad 0 sind.

4. Wir betrachten die Gesamtheit aller Extremalenfelder von der vorhin betrachteten Art, die man in der Umgebung von P_0 konstruieren kann. Wenn man annimmt, daß auf den Bögen C_{10} und C_{02} (oder auf ihrer Verlängerung über P_1 bzw. P_2 hinaus) die zu P_0 konjugierten Punkte P_0' und P_0'' existieren, so besitzt jedes dieser Felder auf jedem dieser Bögen $P_0'P_0$ und P_0P_0'' genau einen Brennpunkt, Q_1 und Q_2. Wir werden zeigen, daß die hierdurch definierte Zuordnung zwischen den Punkten von $P_0'P_0$ und denen von P_0P_0'' *umkehrbar eindeutig* ist, d. h. daß wenn zwei Felder denselben Brennpunkt Q_1 besitzen, auch die entsprechenden Punkte Q_2 zusammenfallen und umgekehrt, und ferner daß sie *monoton* ist, d. h. daß wenn Q_1 von P_0' bis P_0 läuft, sich der entsprechende Punkt Q_2 von P_0 nach P_0'' bewegt. Das berechtigt uns dann, Q_2 *den zu* Q_1 *konjugierten Punkt* zu nennen.

Betrachten wir ein bestimmtes Feld, gegeben durch die Gleichungen (1.9), (1.10), (3.1), und beschränken wir uns zunächst auf den in T_1 gelegenen Teil, $s \leqq s_0$. Die Funktion

$$(4.1) \qquad \Delta(s) = \left| \begin{matrix} \varphi_s & \varphi_t \\ \psi_s & \psi_t \end{matrix} \right|_{t=t_0} = \psi_t(s, t_0) \cos \vartheta - \varphi_t(s, t_0) \sin \vartheta$$

ist eine Lösung der zum Bogen C_{10} gehörigen Jacobischen Differentialgleichung des gewöhnlichen Problems, die für den zum Punkt Q_1 gehörigen Parameterwert verschwindet und durch diese Nullstelle und durch den Wert

$$(4.2) \qquad \Delta(s_0) = \sin \tau_0 \cos \vartheta_0 - \cos \tau_0 \sin \vartheta_0 = \sin (\tau_0 - \vartheta_0),$$

der von der Wahl des Feldes überhaupt nicht abhängt, eindeutig festgelegt ist. Die zu verschiedenen Nullstellen gehörigen Lösungen lassen sich auch durch die verschiedenen Werte $\Delta'(s_0)$ ihrer Ableitung im Punkt s_0 charakterisieren, die, wie man aus den Sturmschen Separationssätzen leicht folgert, monoton von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, wenn der Punkt Q_1 von P_0' bis P_0 variiert.

Entsprechendes gilt für die andere Feldhälfte. Hier ist

$$(4.2') \qquad \bar{\Delta}(s_0) = \sin (\tau_0 - \bar{\vartheta}_0),$$

und der zugehörige Wert $\bar{\Delta}'(s_0)$ wächst ebenfalls von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn der Punkt Q_2 den Bogen P_0P_0'' durchläuft. Wir werden nun eine Beziehung der Form

$$(4.3) \qquad \bar{\Delta}'(s_0) = A\Delta'(s_0) + B, \quad A > 0,$$

herleiten, die allein aus dem Wert von $\Delta'(s_0)$ den zugehörigen Wert von $\bar{\Delta}'(s_0)$ zu berechnen gestattet, und damit werden wir bewiesen haben, was wir beweisen wollten.

Zu dem Zweck betrachten wir die zu einem Feld gehörige Funktion $\vartheta(s, t)$, zunächst wieder in T_1. Es ist

$$(4.4) \qquad \cos \vartheta = \frac{\varphi_s}{\sqrt{\varphi_s^2 + \psi_s^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{\psi_s}{\sqrt{\varphi_s^2 + \psi_s^2}},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \cos \vartheta \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial t} - \sin \vartheta \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial t} = \cos \vartheta \frac{\psi_{st}}{\sqrt{\varphi_s^2 + \psi_s^2}} - \sin \vartheta \frac{\varphi_{st}}{\sqrt{\varphi_s^2 + \psi_s^2}},$$

da die vom Differenzieren der Wurzel herrührenden Terme sich zerstören. Für $s = s_0$, $t = t_0$ hat man einfach

$$(4.5) \qquad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0 = \cos \vartheta_0 (\psi_{st})_0 - \sin \vartheta_0 (\varphi_{st})_0.$$

Differenziert man die Relationen (4.4) nach s, multipliziert die erste mit ψ_t, die zweite mit $-\varphi_t$, addiert und setzt $s = s_0, t = t_0$, so erhält man

$$(4.6) \qquad -\cos (\tau_0 - \vartheta_0) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)_0 = (\varphi_{ss})_0 \sin \tau_0 - (\psi_{ss})_0 \cos \tau_0.$$

Nun differenzieren wir (4.1) nach s und setzen $s = s_0$; dann erscheint rechts die Summe der rechten Seiten von (4.5) und (4.6). Also ist

$$\Delta'(s_0) = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_0 - \cos(\tau_0 - \vartheta_0)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)_0. \tag{4.7}$$

Zu (4.5), (4.6), (4.7) analoge Formeln, die zur andern Feldhälfte gehören, erhält man, indem man über alle ϑ und Δ Querstriche setzt.

Endlich wird (3.1) nach t differenziert und $t = t_0$ gesetzt; unter Benutzung von (1.1) erhält man

$$\begin{aligned}
&\{F_{x'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{x'}(\vartheta_0)\}\left(\frac{d\cos\tau}{dt}\right)_{t=t_0} + \{F_{y'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{y'}(\vartheta_0)\}\left(\frac{d\sin\tau}{dt}\right)_{t=t_0} \\
&+ \{F_{x'x}(\bar{\vartheta}_0) - F_{x'x}(\vartheta_0)\}\cos^2\tau_0 + \{F_{x'y}(\bar{\vartheta}_0) + F_{y'x}(\bar{\vartheta}_0) - F_{x'y}(\vartheta_0) - F_{y'x}(\vartheta_0)\}\cos\tau_0\sin\tau_0 \\
&+ \{F_{y'y}(\bar{\vartheta}_0) - F_{y'y}(\vartheta_0)\}\sin^2\tau_0 + F_1(\bar{\vartheta}_0)\sin(\tau_0 - \bar{\vartheta}_0)\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial t}\right)_0 - F_1(\vartheta_0)\sin(\tau_0 - \vartheta_0)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)_0 \\
&= \Phi''(t_0).
\end{aligned}$$

In dieser Geichung und in (4.7) hängen nur die Größen $\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial t}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)_0$ von der Wahl des Feldes ab; wir können $\bar{\Delta}'(s_0)$ und $\Delta'(s_0)$ in die letzte Gleichung einführen und alles außer dem Term mit $\bar{\Delta}'(s_0)$ auf die rechte Seite bringen. Dann sind die Koeffizienten von $\bar{\Delta}'(s_0)$ und $\Delta'(s_0)$ beiderseits positiv, man kann durch den ersteren dividieren und erhält die gewünschte Beziehung (4.3).

Jetzt können wir wieder die vorgegebenen Endpunkte P_1 und P_2 betrachten. Dann lautet die *Jacobische notwendige Bedingung* für ein Minimum: *Der auf der geknickten Extremalen C zu P_1 konjugierte Punkt darf nicht vor dem Endpunkt P_2 liegen.* Und diesen konjugierten Punkt kann man ohne Feldkonstruktion so erhalten: Man bestimmt dasjenige Integral der zum Bogen C_{10} gehörigen Jacobischen Differentialgleichung, das für $s = s_1$ verschwindet, verfügt über den darin enthaltenen willkürlichen Faktor so, daß $\Delta(s_0) = \sin(\tau_0 - \vartheta_0)$ wird, bestimmt $\bar{\Delta}(s)$ als Integral der zu C_{02} gehörigen Jacobischen Gleichung aus $\bar{\Delta}(s_0) = \sin(\tau_0 - \bar{\vartheta}_0)$ und (4.3) und sucht die nächste Nullstelle von $\bar{\Delta}(s)$.

Man bemerke, daß die Verhältnisse in der Umgebung unserer Ecke P_0 viel einfacher liegen als in der Umgebung einer „freien" Ecke des gewöhnlichen Problems nach der von Carathéodory, Dresden und Bolza entwickelten Theorie der diskontinuierlichen Lösungen [1]). Sowohl was die Theorie der ersten Variation wie vor allem die eben entwickelte der konjugierten Punkte betrifft, besitzt der Punkt P_0 viel mehr Ähnlichkeit mit einem gewöhnlichen Punkt als mit einer Ecke des gewöhnlichen Variationsproblems. Es liegt dies an folgendem. Wir haben eine Zuordnung der Integrale der Jacobischen Gleichung für die beiden Teilbögen betrachtet. Diese Zuordnung ist so beschaffen, daß niemals das eine Integral in P_0 verschwinden kann, wenn das andere von Null verschieden ist. Gerade dieses Vorkommnis ist aber charakteristisch für die Komplizierung der Verhältnisse, die man in der Theorie der konjugierten Punkte bei den diskontinuierlichen Lösungen des gewöhnlichen Problems hat.

5. Man kann das zuletzt behandelte Jacobische Kriterium auch durch ein „Eigenwertkriterium" ersetzen, wenn man mit Lichtenstein [2]) von der Theorie der „zweiten Variation" ausgeht.

---

[1]) Vgl. Bolza, Vorlesungen p. 372ff., wo auch die Originalabhandlungen zitiert sind.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Gött. Nachr. 1919, p. 161.

Dazu betrachten wir eine beliebige Schar von Vergleichskurven, deren Darstellung wir, ein wenig allgemeiner, so ansetzen:

$$x = \varphi(s, \alpha), \quad y = \psi(s, \alpha).$$

Für $\alpha = \alpha_0$ soll die geknickte Extremale C herauskommen und wie früher für $s = s_0$ die Kurve L; d. h. man hat eine Funktion $t(\alpha)$, so daß

$$\varphi(s_0, \alpha) \equiv \xi(t(\alpha)), \quad \psi(s_0, \alpha) \equiv \eta(t(\alpha))$$

ist. Ferner führen wir die Funktion

$$w(s) = \left| \begin{matrix} \varphi_s & \varphi_\alpha \\ \psi_s & \psi_\alpha \end{matrix} \right|_{\alpha=\alpha_0} = \psi_\alpha(s, \alpha_0) \cos \vartheta - \varphi_a(s, \alpha_0) \sin \vartheta$$

ein; für $s = s_0$ wird wie früher der zum Bogen C_{02} gehörige Wert durch Überstreichen gekennzeichnet. Es ist also, wenn man noch $t'(\alpha_0) = w_0$ setzt,

$$(5.1) \qquad w(s_0) = w_0 \cdot \sin(\tau_0 - \vartheta_0), \quad \bar{w}(s_0) = w_0 \cdot \sin(\tau_0 - \bar{\vartheta}_0).$$

Die zweite Variation ist die zweite Ableitung der Größe J, die ein Minimum sein soll, nach α, gebildet an der Stelle α_0. Die Weierstraßsche Umformung [1]) liefert für sie den Ausdruck

$$(5.2) \qquad 2 J_2 = \int_{s_1}^{s_2} \{p w'^2 - k w^2\} ds - h w_0^2;$$

dabei ist

$$p(s) = F_1(xy, x'y') > 0, \quad k(s) = -F_2(xy, x'y');$$
$$h = \{L(\bar{\vartheta}_0) - L(\vartheta_0)\} \cos^2 \tau_0 + 2\{M(\bar{\vartheta}_0) - M(\vartheta_0)\} \cos \tau_0 \sin \tau_0$$
$$+ \{N(\bar{\vartheta}_0) - N(\vartheta_0)\} \sin^2 \tau_0 + \{F_{x'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{x'}(\vartheta_0)\} \xi''(t_0)$$
$$+ \{F_{y'}(\bar{\vartheta}_0) - F_{y'}(\vartheta_0)\} \eta''(t_0) - \Phi''(t_0); \quad (L(\bar{\vartheta}_0) = L(x, y, \cos \bar{\vartheta}_0, \sin \bar{\vartheta}_0) \text{ usw.}).$$

Die Funktionen p und k sind wie w im Punkt s_0 unstetig; $\bar{p}(s_0)$ ist der Grenzwert vom Bogen C_{02} her.

Die zweite Variation soll nicht-negativ sein für alle außer in $s = s_0$ stetigen Funktionen $w(s)$ mit abteilungsweise stetiger Ableitung, die für $s = s_1$ und $s = s_2$ verschwinden und für $s = s_0$ mit passendem w_0 (5.1) erfüllen. Betrachten wir also (nach Bliss) das Problem, sie zum Minimum zu machen. Dazu muß man eine Normierung einführen, etwa

$$(5.3) \qquad \int_{s_1}^{s_2} k w^2 ds + h w_0^2 = 1$$

(indem wir uns für den Moment auf diejenigen w beschränken, für die dieser Ausdruck positiv ist; es sind ohnehin die einzigen, für die J_2 Null oder negativ werden kann). Es handelt sich also um das isoperimetrische Problem, die zweite Variation oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Integral

$$(5.4) \qquad \int_{s_1}^{s_2} p w'^2 ds$$

zum Minimum zu machen unter der Nebenbedingung (5.3). Dies führt uns von selbst zum Studium des Eigenwertproblems der Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}(p w') - \lambda k w = 0$$

---

[1]) S. z. B. Bolza, Vorlesungen p. 224ff., wo man auch die Erklärung der Funktionen $L(xy, x'y')$, M, N und $F_2(xy, x'y')$ nachsehe.

mit der Randbedingung $w(s_1) = w(s_2) = 0$ und den Unstetigkeitsbedingungen (5.1) und

$$(5.5) \quad \bar{p}(s_0) \sin(\tau_0 - \bar{\vartheta}_0) \cdot \bar{w}'(s_0) - p(s_0) \sin(\tau_0 - \vartheta_0) \cdot w'(s_0) + \lambda h w_0 = 0$$

im Punkt $s = s_0$[1]). Dieses Problem kann man mit der Lichtensteinschen Methode[2]) behandeln; diese liefert die Existenz von unendlich vielen Eigenwerten, im allgemeinen positiven und negativen, λ_j, und von zugehörigen normierten Eigenfunktionen $\varphi^{(j)}(s)$, die den Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{s_1}^{s_2} k \varphi^{(j)} \varphi^{(l)} ds + h \varphi_0^{(j)} \varphi_0^{(l)} = \delta_{jl} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}$$ [3])

genügen. Zu jeder zulässigen Funktion $w(s)$ — die Normierung (5.3) und die im Zusammenhang damit gemachte Einschränkung[4]) fällt wieder fort — kann man die „Fourierkoeffizienten"

$$x_j = \int_{s_1}^{s_2} k w \varphi^{(j)} ds + h w_0 \varphi_0^{(j)}$$

einführen und erhält die beiden Beziehungen

$$\int_{s_1}^{s_2} k w^2 ds + h w_0^2 = \sum_j \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} x_j^2$$

und

$$\int_{s_1}^{s_2} p w'^2 ds \geqq \sum_j |\lambda_j| x_j^2,$$

aus denen sofort die *Lichtensteinsche Formel für die zweite Variation* folgt:

$$J_2 \geqq \frac{1}{2} \sum |\lambda_j| \left(1 - \frac{1}{\lambda_j}\right) x_j^2.$$

Man braucht also bloß den kleinsten positiven Eigenwert λ_1 zu betrachten (man setze $\lambda_1 = +\infty$, falls nur negative Eigenwerte existieren). Es muß jedenfalls $\lambda_1 \geqq 1$ sein, damit die zweite Variation nicht negativ werden kann; das ist die der Jacobischen entsprechende Bedingung. Man zeigt leicht, daß mit der zweiten Variation auch die Gesamtvariation negativ wird, sobald man $|\alpha - \alpha_0|$ genügend klein wählt. Darüber hinaus ergibt sich, daß die schärfere Bedingung $\lambda_1 > 1$ für ein schwaches Minimum *hinreichend* ist. Ist $\lambda_1 = 1$, so müssen die höheren Variationen herangezogen werden.

---

[1]) Für $\lambda = 1$ handelt es sich um die Jacobische Differentialgleichung für die Bögen C_{10}, C_{02}, und (5.5) ist dann natürlich im wesentlichen identisch mit (4.3).

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Rend. circ. mat. Palermo **38** (1914), p. 113.

[3]) δ_{jl} ist das *Kroneckers*che Symbol.

[4]) Ist $\varphi(s)$ eine Eigenfunktion, also eine Extremale des isoperimetrischen Problems, und λ der zugehörige Eigenwert, so ist stets

$$\int_{s_1}^{s_2} p \varphi'^2 ds - \lambda \left\{ \int_{s_1}^{s_2} k \varphi^2 ds + h \varphi_0^2 \right\} = 0.$$

Daraus folgt, daß λ_1 das Minimum von (5.4) unter der Nebenbedingung (5.3) ist. Bezeichnet λ_{-1} den kleinsten negativen Eigenwert, so ist $-\lambda_{-1}$ das Minimum von (5.4), wenn man die rechte Seite von (5.3) durch -1 ersetzt. Die entsprechenden Minima der zweiten Variation sind dann $\lambda_1 - 1$ bzw. $|\lambda_{-1}| + 1$.

Eingegangen 6. April 1933.

Zu einem Satze von Hazzidakis über gewisse Systeme linearer Differentialgleichungen.

Von *Friedrich Dingeldey* in Darmstadt.

Im 90ten Bande (1881) dieses Journals (S. 80—82, [1880]) hat J. N. Hazzidakis einen Satz abgeleitet, der sich auf gewisse Systeme von linearen, homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung bezieht. Ich will einen weit einfacheren Beweis dieses Satzes geben und ein paar Bemerkungen beifügen. Es handelt sich um folgendes.

Es seien beliebig viele, z. B. drei Differentialgleichungen gegeben:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dt} + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \\ \dfrac{dx_3}{dt} + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots$ Funktionen von t bedeuten. Zu (1) gehört ein adjungiertes System

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - a_1y_1 - b_1y_2 - c_1y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_2}{dt} - a_2y_1 - b_2y_2 - c_2y_3 = 0, \\ \dfrac{dy_3}{dt} - a_3y_1 - b_3y_2 - c_3y_3 = 0, \end{cases}$$

und es hat bekanntlich C. G. J. Jacobi gezeigt [1]), daß zwischen den Lösungen dieser beiden Systeme die Beziehung stattfindet

$$(3)\qquad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \text{konst.}$$

Dies und alles Folgende gilt auch für n Differentialgleichungen, und nur der besseren Übersichtlichkeit halber wählen wir $n = 3$; bei beliebigem n sind alle weiteren Bemerkungen analog zu verallgemeinern.

Es hat nun Hazzidakis a. a. O. ein neues System dadurch abgeleitet, daß er in (2) zu jedem der in der „Diagonale" stehenden Koeffizienten $-a_1, -b_2, -c_3$ die Summe $a_1 + b_2 + c_3$ hinzufügte. So ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} + (b_2 + c_3)z_1 - b_1z_2 - c_1z_3 = 0, \\ \dfrac{dz_2}{dt} - a_2z_1 + (c_3 + a_1)z_2 - c_2z_3 = 0, \\ \dfrac{dz_3}{dt} - a_3z_1 - b_3z_2 + (a_1 + b_2)z_3 = 0. \end{cases}$$

[1]) Dieses Journal Bd. 29 (1845), S. 221 oder Ges. Werke, hrsgg. von K. Weierstraß, Bd. 4, Berlin 1886, S. 404.

In ziemlich umständlicher Weise zeigte Hazzidakis, daß die Lösungen von (4) aus den Unterdeterminanten der durch die partikulären Lösungen $x_1', x_2', x_3'; x_1'', \ldots$

Gleichungen
ultiplizierten

0

20. April 1934

als bekannt
) ein und er-

Den Zeitverhältnissen Rechnung tragend, ermässigen wir - ohne dass der Umfang eine Verminderung erfährt - den Preis für den jetzt beginnenden Band 171 von „Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik“ auf

RM 30.-

WALTER DE GRUYTER & CO.
BERLIN W 10

Gleichungen

iderseits weg,
n der Tat die
Matrix

den Matrizes.

Zu ein

Im 90
einen Satz a
gleichungen
geben und
Es sei

(1)

wo die Koe
adjungiertes

(2)

und es hat
beiden Syst

(3)

Dies und al
Übersichtlic
kungen ana
Es hat
zu jedem d
$a_1 + b_2 + c$

(4)

---

[1]) Dieses

In ziemlich umständlicher Weise zeigte Hazzidakis, daß die Lösungen von (4) aus den Unterdeterminanten der durch die partikulären Lösungen $x_1', x_2', x_3'; x_1'', \ldots$ von (1) gebildeten Determinante

$$(5) \qquad (x'\, x''\, x''') = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}$$

bestehen. Ganz einfach ergibt sich diese Tatsache, indem man zunächst die Gleichungen (1) der Reihe nach mit z_1, z_2, z_3 multipliziert und zu den mit x_1, x_2, x_3 multiplizierten Gleichungen (4) addiert. Man erhält so

$$(6) \qquad \frac{d(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3)}{dt} + (a_1 + b_2 + c_3)(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) = 0$$

und durch Integration

$$(7) \qquad x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = k \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt},$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Um nun die Lösungen der Gleichungen (4) zu finden, trägt man die als bekannt vorausgesetzten partikulären Lösungen $x_1', x_2', x_3'; x_1'', \ldots$ von (1) in (7) ein und erhält so

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1' z_1 + x_2' z_2 + x_3' z_3 = k' \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt}, \\ x_1'' z_1 + x_2'' z_2 + x_3'' z_3 = k'' \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt}, \\ x_1''' z_1 + x_2''' z_2 + x_3''' z_3 = k''' \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt}, \end{cases}$$

wo k', k'', k''' willkürliche Konstanten bezeichnen. Bei Auflösung dieser Gleichungen nach z_1, z_2, z_3 hat man z. B.

$$(9) \qquad z_1 \cdot (x'\, x''\, x''') = \begin{vmatrix} k' & x_2' & x_3' \\ k'' & x_2'' & x_3'' \\ k''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt}.$$

Da nach einer bekannten von Jacobi stammenden Formel [1])

$$(10) \qquad (x'\, x''\, x''') = \gamma \cdot e^{-\int (a_1 + b_2 + c_3) dt},$$

wo γ eine Konstante bedeutet, hebt sich in (9) der Faktor mit der Basis e beiderseits weg, und wenn man γ in die Konstanten k', k'', k''' eingehen läßt, ergeben sich in der Tat die partikulären Lösungen z_1', z_1'', z_1''' von (4) als die drei Determinanten der Matrix

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3' & x_3'' & x_3''' \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man je drei partikuläre Lösungen z_2 und z_3 aus den entsprechenden Matrizes. Damit ist der Satz von Hazzidakis in einfachster Weise bewiesen.

Zu den Gleichungen (4) gehört ein adjungiertes System

$$(12) \qquad \begin{cases} \frac{dw_1}{dt} - (b_2 + c_3) w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = 0, \\ \frac{dw_2}{dt} + b_1 w_1 - (c_3 + a_1) w_2 + b_3 w_3 = 0, \\ \frac{dw_3}{dt} + c_1 w_1 + c_2 w_2 - (a_1 + b_2) w_3 = 0, \end{cases}$$

[1]) A. a. O. S. 222 bzw. S. 405.

und es finden dann zwischen den Lösungen der vier Systeme von Differentialgleichungen (1), (2), (4) und (12) die Beziehungen statt:

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = c, \\ x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = k\,e^{-\int (a_1+b_2+c_3)dt}, \\ z_1w_1 + z_2w_2 + z_3w_3 = c', \\ y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3 = k'e^{+\int (a_1+b_2+c_3)dt}. \end{cases}$$

wo c, k, c', k' willkürliche Konstanten bezeichnen.

Sind alle Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots$ Konstanten, so ist in den vorhergehenden Formeln

$$(14)\qquad e^{\pm\int (a_1+b_2+c_3)dt} = e^{\pm (a_1+b_2+c_3)t},$$

wofür auch $e^{\mp(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$ gesetzt werden kann, wenn λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & \lambda + b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda + c_3 \end{vmatrix} = 0$$

bedeuten, die bei Integration der Gleichungen (1) im Falle konstanter Koeffizienten bekanntlich eine wichtige Rolle spielt.

Es sei nochmals daran erinnert, daß sich alle vorstehenden Ergebnisse in sinngemäßer Weise sofort auf den Fall beliebig vieler Differentialgleichungen ausdehnen lassen.

Auf besondere Fälle werde hier der Kürze halber nicht eingegangen.

Darmstadt, den 27. Oktober 1933.

Eingegangen 28. Oktober 1933.